

М.Д.Тихомиров, И.А.Комаров (ЦНИИ Материалов, Санкт-Петербург, 2002 г.)

Основы моделирования литейных процессов. Сравнение метода конечных элементов и метода конечных разностей. Что лучше?

Данная статья является третьей из серии статей по моделированию литейных процессов. В первых двух статьях обсуждались тепловая и усадочная задачи [1,2]. Помимо этого, более подробно алгоритмы решения тепловой задачи и некоторые общие вопросы моделирования, в том числе краткая характеристика вычислительных методов, рассматривались в [3]. В настоящее время, когда заводы проявляют все больший интерес к системам моделирования литейных процессов (СМ ЛП), заводские специалисты с завидной регулярностью задают вопросы связанные с общей оценкой адекватности математических методов применяемых в различных СМ ЛП. Наиболее часто при этом возникает вопрос: «Что лучше - конечные разности или конечные элементы?» В связи с этим было решено посвятить отдельную публикацию сравнительной оценке этих двух наиболее часто используемых численных методов.

При моделировании физических процессов, связанном с решением дифференциальных уравнений теории поля (тепловые, фильтрационные, диффузионные, деформационные, гидродинамические, электродинамические и т.п. процессы), наиболее часто используют следующие методы численного решения: метод конечных элементов, метод конечных разностей, метод конечных объемов, метод граничных элементов.

Наиболее «сильным» методом вероятно следует считать метод граничных элементов (МГЭ), т.к. в своей основной формулировке он предполагает в пределах граничного элемента аппроксимацию распределения искомой функции (например функции температур) непосредственно по исходному дифференциальному уравнению которым описывается моделируемый процесс. (В других методах аппроксимация в рамках дискретной ячейки более искусственна.) Кроме того, при использовании МГЭ происходит понижение пространственного порядка, что теоретически ускоряет решение и снижает требования к ресурсам вычислительной техники. Однако, при моделировании литейных процессов МГЭ практически не используется, т.к. не смотря на свои многие положительные качества требует однородности физических свойств в рамках крупных граничных элементов. Это не соответствует физике большинства литейных процессов связанных с существенным изменением параметров процесса в локальных произвольных областях – например, при тепловыделении при затвердевании.

Метод конечных объемов (МКО) в определенном смысле является развитием разностных методов, хотя иногда рассматривается как некоторая промежуточная стадия между методом конечных разностей (МКР) и методом конечных элементов (МКЭ). Это вероятно не совсем справедливо, т.к. хотя МКО и учитывает произвольно ориентированные границы внутри разностной ячейки, но в основе своей предполагает ортогональную разностную разбивку (дискретизацию) на прямоугольные параллелепипеды и обладает рядом других особенностей присущих разностным методам. Во всяком случае, МКО пока не получил при моделировании литейных процессов широкого распространения. (Кроме пожалуй задачи заполнения, где применение МКЭ затруднено, а МКР не дает необходимого соответствия по геометрии заполняемой полости.) Неширокое распространение МКО вероятно связано именно с «промежуточным» характером метода - в тех случаях, когда необходимы произвольно ориентированные границы, лучше использовать собственно МКЭ, а когда допустимо представление геометрии в виде набора параллелепипедов, то проще решать задачу классическим МКР.

Два наиболее часто применяемых метода в СМ ЛП – это МКЭ и МКР. Разностные методы более старые, именно с ними связаны первые опыты численного моделирования физических процессов, а в 70-ых годах и первые успехи при создании систем компьютерного моделирования литейных процессов [4]. Конечный-элементный подход более молодой (по данным [5] впервые описан американскими исследователями в 1956 г.) и более «сильный», т.е. на уровне исходных посылок точнее соответствует уравнениям задач теории поля. Соответственно МКЭ требует

меньше машинных ресурсов (меньше оперативной памяти), расчет идет быстрее (меньше затраты процессорного времени), результат расчетов может быть более адекватным. При моделировании различных физических процессов в 70-80-ых годах МКР и МКЭ имели примерно одинаковое распространение, несмотря на теоретические преимущества МКЭ. Дело в том, что МКЭ несколько сложнее для программирования, и, кроме того, использование МКЭ требует наличия специальных программ-«разбивщиков» на произвольные элементы-многогранники (чаще всего треугольные пирамиды). МКР же был хорошо освоенным методом, генерация разностной сетки для МКР требовала меньших усилий, для МКР было достаточно много опубликованных алгоритмов и программных библиотек.

В 80-90-ых годах положение изменилось. Был набран необходимый опыт применения МКЭ и создания систем моделирования на базе МКЭ. Гигантский скачек совершили конструкторские программные продукты (CAD-системы) для создания трехмерных (3D) геометрических моделей (ГМ). В то же время на рынке программных продуктов появились автоматизированные «разбивщики» для МКЭ, так что генерация конечно-элементной сетки превратилась практически в рутинную операцию. На фоне всего этого в середине 80-ых годов разностные системы моделирования почти повсеместно были вытеснены конечно-элементными системами в силу очевидных преимуществ МКЭ. Единственным исключением по совершенно объективным причинам оставались (и остаются) системы для моделирования гидро- и аэродинамических процессов. Поскольку подобные задачи зачастую связаны с наличием движущейся свободной поверхности, то применение МКЭ в классической постановке потребовало бы регенерации сетки на каждом шаге по времени (хотя, вероятно в рамках МКЭ возможны и более экономичные подходы). Но и в этой области наблюдается стремление заменить МКР различными «промежуточными» методами, например МКО (см. выше). Но так или иначе, сейчас все известные универсальные системы моделирования – ANSYS, NASTRAN, PATRAN, COSMOS и т.д. базируются на МКЭ, т.к. МКР считается недостаточно эффективным и в значительной мере устаревшим методом.

Такое положение не требовало бы специальных комментариев, если бы не одно важное для литейщиков обстоятельство. Дело в том, что по различным субъективным причинам на рынке систем моделирования литейных процессов (СМ ЛП) полного вытеснения разностных систем не произошло. В первую очередь это связано с тем, что для литейных процессов моделирование применяли менее интенсивно, чем для деформационных, прочностных и т.п. В этом смысле с сожалением приходится констатировать отставание литейщиков. Как следствие этого – меньшая осведомленность среднего литейщика и появление у производителей СМ ЛП возможности (неосведомленность пользователя) и необходимости (маленький тираж продаж) минимизировать расходы на обновление систем и улучшение алгоритмов. Поскольку реальная оценка той или иной СМ ЛП влияет на коммерческий успех системы или престиж разработчика (важный фактор для некоммерческих программ), то далеко не все продавцы и разработчики СМ ЛП заинтересованы в широком распространении объективной информации об особенностях различных численных методов. Вероятно этим и объясняется очевидный дефицит информации у литейщиков в этом вопросе. Рассмотрим наиболее характерные особенности МКЭ и МКР применительно к моделированию ЛП более подробно, по возможности не углубляясь в математические подробности.

Наиболее наглядно разница между МКЭ и МКР видна по способу дискретизации геометрии. При МКЭ расчетная геометрия (КЭ-сетка) представляет из себя набор относительно крупных неправильных треугольных пирамид непрерывно без пересечений заполняющих расчетную область произвольной конфигурации - собственно геометрию моделируемого объекта. Применительно к ЛП это будет геометрия отливки и формы. (На самом деле вид конечного элемента может быть любым, в том числе и с криволинейными гранями, однако чаще всего используются тетраэдральные четырех узловые элементы.) При МКР расчетная геометрия чаще всего представляет из себя набор относительно мелких параллелепипедов, полученных наложением непрерывной прямоугольной ортогональной сетки на прямоугольную расчетную область, в которую вписана геометрия отливки и формы. (В общей разностной постановке конфигурация ячейки может быть и не параллелепипедом, а например в 2D правильным

шестиугольником, но неортогональные сетки практически не применяются.) На рис.1 показан пример элементных и разностных разбивок для цилиндра.

Степень дискретности разбивки определяется в МКЭ и МКР несколько по разному. В МКЭ значения расчетной функции определяются в узлах сетки, поэтому размерность матрицы при решении зависит от количества узлов сетки (места, где сходятся вершины элементов), а не от количества элементов (тетраэдральных пирамид), которых обычно в несколько раз больше, чем узлов. В МКР количество узлов и количество ячеек (параллелепипедов) близки по значениям, однозначно связаны друг с другом и густоту сетки обычно определяют количеством ячеек. (По одной линии в разностной сетке количество узлов на единицу больше количества ячеек.) В дальнейшем для возможности сравнения будем и для МКЭ, и для МКР определять дискретность по количеству узлов сетки. На рис.1 видно, что при близких значениях дискретности конечно-элементная сетка гораздо более адекватно описывает реальную геометрию (если конечно она не представляет из себя куб). Более того, очевидно, что разностная сетка, в отличие от элементной, даже при очень большой густоте всегда принципиально неправильно будет описывать любые поверхности непараллельные граням габаритного параллелепипеда, представляя их «зубчатым» рельефом. К особенностям сетки МКЭ можно отнести также то, что все узлы элементной сетки, в отличие от разностной сетки, находятся непосредственно на реальной поверхности моделируемого тела, причем это правило сохраняется при любой, даже очень грубой дискретности элементной сетки. Кроме того, дискретность элементной сетки может легко изменяться – в относительно массивных частях геометрии (прибыли и т.п.) сетка может быть в несколько раз разреженнее, чем в областях с мелкими фрагментами (тонкими стенками и т.п.). Узлы же разностной сетки с увеличением густоты лишь приближаются к реальной поверхности и в общем случае всегда находятся либо «над», либо «под» ней. В общем случае ошибка в линейных размерах тела при разностной разбивке достигает размера ячейки. Иногда разработчики разностных СМ ЛП пытаются уменьшить такого рода погрешности за счет возможности задавать переменный шаг разбивки. Это действительно помогает, но только для очень простых конфигураций деталей. Для фасонных литейных деталей возможность задавать переменный шаг разностной сетки практически не улучшает ситуацию, т.к. проекции на координатные плоскости тех фрагментов, которые требуют мелкой сетки, почти всегда перекрываются. Таким образом шаг разбивки все равно приходится делать максимально мелким по всему расчетному объему. Поскольку в реальности дискретность сетки практически всегда лимитирована ресурсами вычислительной техники (чаще всего оперативной памятью), то по каждой из ортогональных осей обычно редко удается задать более 200-300 ячеек (это 8-27 миллионов ячеек по всему объему). При этом собственно на отливку приходится не более половины ячеек, а остальные обычно расположены в форме. Соответственно, для МКР одна сотая габарита отливки – это обычная ошибка при задании размеров. При наличии в протяженной детали тонких стенок или небольших углов наклона поверхностей (например, литейные напуски и уклоны) это чаще всего приведет к существенному искажению геометрических соотношений определяющих тепловые процессы. Чтобы понять о чем идет речь, достаточно представить себе, что литейный уклон в 3-5 градусов, который должен обеспечить направленность затвердевания, в разностном представлении будет являться одной-двумя ступеньками на достаточно протяженной поверхности.

Однако, основная разница между МКЭ и МКР отнюдь не в разной точности описания геометрии. С точки зрения адекватности решения, основная разница заключается в тех исходных посылах на которых базируется каждый из этих методов. Не углубляясь в математические тонкости формулировки методов, можно с определенной степенью вульгаризации сказать, что МКЭ предполагает некоторое распределение искомой функции внутри элемента, а МКР предполагает ее постоянное значение внутри ячейки. Таким образом, если говорить о распределении температуры по толщине некоторой стенки, то в МКЭ оно описывается непрерывной линией, состоящей из соединенных отрезков, а в МКР ступенчатым профилем. Эти два вида аппроксимации показаны на рис. 2, из которого видно, что при одинаковом шаге дискретизации, МКЭ гораздо точнее описывает реальное температурное распределение, чем МКР. Собственно именно то, что МКЭ в рамках исходных посылок более точно соответствует

физике решаемых задач, в которых чаще всего предполагается непрерывное гладкое распределение искомой функции, и делает его более «сильным» методом, чем МКР.

Следует понимать, что вышеприведенные формулировки не претендуют на строгость и сделаны для упрощения изложения сути. В МКЭ, как уже было сказано выше, не обязательно применять линейную аппроксимацию, тогда температурное распределение будет описываться не набором прямых отрезков, а некоторой линией, состоящей из криволинейных участков. Однако, в «элементных» СМ ЛП чаще всего используются симплекс-элементы, предполагающие именно линейную аппроксимацию. Что касается МКР, то постоянное значение функции в рамках разностной ячейки явно присутствует лишь в «классической» формулировке метода. В различных вариациях МКР, предположение о постоянном значении функции может не присутствовать в явном виде, однако при внимательном анализе его обычно всегда можно обнаружить как неявное предположение при некоторых операциях (чаще всего связанных с теплосодержанием ячейки) или как следствие других исходных посылок. Также не следует путать визуализацию расчетных полей и сам расчет. При применении МКР часто визуализируют температурные поля таким образом, что видно распределение температуры внутри ячейки. Сделать это несложно, например посчитав температуру в каждой вершине ячейки как среднюю от всех ячеек сходящихся в этой вершине, тогда в каждой из 8 вершин ячейки будет своя температура и, соответственно, можно назначить некоторое распределение внутри ячейки. Это безусловно весьма полезный прием, однако он не влияет на характеристики самого расчета, а является постпроцессорной интерпретацией его результатов.

Исходя из выше изложенного, следует сделать вывод о том, что каждый из методов – МКЭ и МКР для достижения правильных результатов расчета предъявляет свои определенные требования к густоте расположения узлов внутри тела помимо тех, которые связаны с точностью описания геометрии. Можно предположить, что количество узлов для МКР должно быть существенно большим, чем для МКЭ. При этом, требуемая густота, как и другие параметры, очевидно будут зависеть от особенностей распределения искомой функции и, таким образом, будут разными для разных процессов и разными для разных условий протекания процесса. Например, для тепловой задачи применительно к ЛП такие параметры могут существенно отличаться от параметров для тепловой же задачи применительно например к работе радиаторов различных механизмов. При этом наиболее важным вопросом будет являться вопрос о том достижимы ли в реальности те параметры, которые обеспечат адекватное решение для ЛП. (Конкретные значения таких параметров попробуем определить ниже.)

Еще одной характерной разницей между МКЭ и МКР является то, что по своей сути МКЭ приспособлен для решения задач с наличием существенно влияющих границ, а МКР в основе своей предполагает наличие некоторой непрерывной (в идеале неограниченной) среды в которой и проводится поиск распределения некоторой функции. В такой среде действительно становится неважным жесткая ортогональность граней разностной ячейки. В непрерывной среде любой поток можно абсолютно адекватно описать тремя ортогональными составляющими и совершенно произвольно назначить расположение границ расчетной ячейки, в том числе и ортогонально, как это происходит в МКР. При этом следует понимать, что «непрерывность» среды не означает одинаковость свойств этой среды, она лишь означает, что искомое распределение не прерывается на некоторых границах. Однако, в общем случае ЛП как раз и предполагают наличие таких границ – в первую очередь между отливкой и формой. В связи с этим можно показать, что МКР всегда дает ПРИНЦИПИАЛЬНО НЕПРАВИЛЬНОЕ решение для граничных задач при наличии произвольно расположенных границ. Хотя, следует отметить, что вопрос о величине погрешности МКР при наличии границ зависит от того, насколько велики потоки через эти границы, а в конечном итоге от того, насколько велик разрыв функции на границе. Известно, что применительно к ЛП, этот разрыв относительно невелик при малотеплопроводных формах (литье в песчаные формы) и относительно велик при высокотеплопроводных формах (литье в кокиль). (Конкретные значения таких ошибок рассмотрим ниже.)

При наличии граничных потоков всегда становится существенным соблюдение соотношения между объемом и площадью границ. Например, такая широко известная в литье характеристика, как «приведенная толщина», которая определяет время затвердевания, является

отношением объема к теплоотводящей поверхности. Очевидно, что в МКЭ увеличивая дискретность сетки можно сколь угодно точно приблизиться как к реальному значению объема моделируемой геометрии, так и к реальному значению внешней площади этой геометрии. В отношении же МКР это справедливо только по отношению к объему. Все более и более измельчая сетку, в МКР можно все больше приближаться к истинной величине объема. (Хотя, как было показано выше, с гораздо меньшей точностью, чем при МКЭ.) Однако, как это не неожиданно, величина площади внешней поверхности геометрии в разностном представлении практически не будет зависеть от густоты сетки и всегда будет одинаково неправильной при любой, сколь угодно мелкой дискретизации. Чтобы пояснить это, рассмотрим (см. рис.3) двумерный случай разностной разбивки круга. На рис.3 видно, что поскольку все границы круга описаны либо вертикальными, либо горизонтальными отрезками, то периметр этой фигуры всегда будет равен периметру квадрата, в который вписан этот круг, т.е. периметр разностного «круга» равен четырем диаметрам. При этом от шага сетки этот результат совершенно не зависит. В действительности же, периметр круга, как известно равен произведению числа «пи» на диаметр. Для примера можно вычислить ошибку, которую даст разностный метод при определении времени затвердевания неограниченного цилиндра в среде с постоянной температурой. Как известно, время затвердевания такого цилиндра будет пропорционально квадрату приведенной толщины [6]. Тогда, предполагая, что дискретность достаточна для точного вычисления поперечной площади цилиндра и делая очевидные преобразования, можно вычислить ошибку МКР в процентах от реального времени затвердевания:

$$\Delta\tau = (1 - (\pi/4)^2) * 100\% = 38\%. \quad (1)$$

Таким образом, при использовании МКР время затвердевания цилиндра будет на 38% меньше, чем реальное. Следует подчеркнуть, что вычисленная погрешность МКР - это не ошибка численного решения или недостаточной дискретизации, а постоянная погрешность разностного метода для цилиндрических конфигураций. Для шара она будет больше, а для плиты ориентированной параллельно одной из плоскостей разностной разбивки отсутствует вовсе. Очевидно, что при тех же условиях ошибка для МКЭ будет нулевой для всех конфигураций.

Как видим, для случая, когда теплопередача через границу играет определяющую роль (охлаждение в среду с постоянной температурой), погрешность определяемая особенностями МКР может быть достаточно велика, а для МКЭ подобная погрешность отсутствует. Однако, применительно к ЛП, эта погрешность МКР может быть существенно меньше вычисленной выше, т.к. происходит нагрев формы и общее температурное распределение в системе «отливка-форма» может приближаться к непрерывному температурному распределению без существенного скачка на границе между отливкой и формой. Следует ожидать, что ошибка МКР будет меньше при литье в песчаные формы и больше при литье в кокиль. Очевидно, что максимальной, приближающейся к теоретическому значению эта погрешность будет для водоохлаждаемых форм.

Для определения количественных значений описанных выше основных сравнительных характеристик МКЭ и МКР были проведены сравнительные расчеты на реальных СМ ЛП. Поскольку основная цель этой работы была не оценка конкретных систем, а выявление общих особенностей методов, то в качестве разностных программ участвующих в тесте, были выбраны две системы совершенно различные по классу реализации. Первая является известной коммерческой разностной СМ ЛП имеющая опыт неоднократного применения на литейных производствах. Вторая разностная программа является учебно-исследовательской разработкой и не имеет практического коммерческого значения. В дальнейшем будем условно называть их «МКР-1» (коммерческая СМ ЛП) и «МКР-2» (исследовательская программа).

В качестве конечно-элементной СМ ЛП была выбрана известная система «Полигон». В дальнейшем будем называть ее «МКЭ-Полигон». Поскольку ранее уже проводились сравнительные расчеты на системе «Полигон» и других конечно-элементных СМ ЛП [7], то будем считать, что «Полигон» в данном случае является типичным представителем конечно-элементных литейных систем. Можно показать, что результаты решений конечно-элементных систем для тестовых примеров достаточно близки. На рис.4 показаны расчетные кривые затвердевания в стальном кокиле цилиндра из алюминиевого сплава диаметром 50 мм для конечно-элементной СМ ЛП «Полигон» и известной конечно-элементной СМ ЛП ProCAST. При

сравнении кривых на рис.4 видно, что результаты расчетов для тестовых конфигураций в этих системах практически идентичны.

Для всех сравнительных расчетов в «МКЭ-Полигон», «МКР-1» и «МКР-2» в качестве свойств сплава использовались экспериментально определенные свойства бинарного сплава Al – 5% Si, в качестве свойств песчаной формы использовались справочные значения, в качестве свойств металлической формы и условий теплопередачи на границе «отливка-форма» использовались экспериментально определенные параметры. Для сравнительных расчетов по определению сравнительных погрешностей методов использовались такие параметры дискретности сеток, которые обеспечивали отсутствие изменения результатов при дальнейшем измельчении сетки.

Как уже отмечалось выше, важным параметром метода является требуемая дискретность сетки. Причем, эту дискретность в общем случае следует определять непосредственно для тех характерных условий, которые реально определяют моделируемый процесс. В качестве показателя дискретности было выбрано количество узлов на диаметр при моделировании затвердевания цилиндра диаметром 45 мм в песчаной форме. Последовательно измельчая сетку, фиксировали время конца затвердевания цилиндра, которое использовалось в качестве критерия результата расчета. Очевидно, что при недостаточно мелкой разбивке расчет будет давать неверные результаты, которые будут все ближе приближаться к тому решению, которое в состоянии обеспечить данный алгоритм. Когда результаты расчетов перестанут изменяться, можно будет констатировать, что та дискретность при которой перестали происходить изменения результатов и определяет минимально допустимое количество узлов по толщине отдельных фрагментов геометрии. Результаты этих расчетов представлены на рис.5. В данном случае не важно какое время затвердевания дает тот или иной метод (это будет обсуждено ниже), а важно при каком количестве узлов значение этого времени перестает меняться. Из рис.5 видно, что результаты расчета при МКЭ очень быстро приблизились к «окончательным», практически сразу при переходе с 5 до 7 узлов на диаметр и перестали меняться начиная с 8-9 узлов на диаметр. Для МКР же для приближения к «окончательному» результату надо не менее 30 узлов на диаметр, а для достижения практического отсутствия перемен необходимо около 35 узлов. Из общих соображений по кинетике затвердевания и охлаждения можно предположить, что вероятно такая дискретность нужна для фрагментов типа «цилиндр», а для «стенок» она может быть в половину меньше, т.е. 3-4 для МКЭ и 10-15 для МКР. В то же время для фрагментов типа «шар» дискретность видимо должна быть не менее 10-12 узлов для МКЭ и 35-40 для МКР. В МКЭ достижение дискретности в 7-9 узлов по толщине каждого «цилиндрического» фрагмента и 3-4 узла в «стенках» не представляет затруднений и вполне вписывается в ресурсы порядка 50-150 Мб оперативной памяти. Для МКР же, вероятнее всего, достижение требуемой дискретности возможно только для отливок с крайне простой конфигурацией. В противном случае, будет требоваться оперативная память порядка тысяч Мб. Это легко подсчитать, если предположить, что как упоминалось выше, что в МКР на отливку обычно приходится около сотни узлов по каждой оси. Тогда, несколько утрируя, можно заметить, что отливка с тремя цилиндрическими прибылями по 30 узлов по диаметру каждой прибыли, почти полностью исчерпывают возможности МКР по сложности моделируемой геометрии. Это конечно не совсем так, т.к. вероятно в разностных системах практически никогда не считают с той дискретностью, которую реально требует применение МКР для моделирования ЛП.

Теперь, когда требуемая дискретность обоих методов определена, рассмотрим задачу о определении величин систематических ошибок МКР для конфигураций, отличающихся от «плиты». Как уже указывалось выше, для тел типа «плита» расположенной параллельно одной из плоскостей разностной разбивки, МКЭ и МКР должны давать одинаковые результаты. Сравнительные расчеты показали, что это положение выполняется (см. рис.6). Из рис.6 видно, что разница между МКЭ и МКР по времени конца затвердевания не превышает 3%. Это свидетельствует о том, что все три системы – «МКЭ-Полигон», «МКР-1» и «МКР-2» не содержат не выявленных погрешностей, используют относительно сходные физические модели, а кроме того, что при вводе исходных данных соблюдается их идентичность (одинаковость) для каждой из систем.

Выше было показано, что для цилиндрических конфигураций МКР должен давать систематическую ошибку и время конца затвердевания цилиндров рассчитанное с помощью МКР будет меньше, чем должно быть при правильном учете соотношения объема и теплоотводящей поверхности. Для выяснения величины этой погрешности при литье в песчаные (малотеплопроводные) формы провели сравнительные расчеты затвердевания цилиндра диаметром 45 мм в песчаной форме. Результаты этих расчетов показаны на рис.7. Как и ожидалось, наблюдается «отставание» по времени конца затвердевания разностного решения от конечно-элементного. Для «МКР-1» эта разница составляет 12%, а для «МКЭ-2» 6%. Учитывая, что для плиты разница «МКЭ-Полигон» с «МКР-1» была минус 3%, а с «МКР-2» плюс 3%, получаем, что для обоих разностных систем систематическая погрешность составляет 9%. (Для одной $12\%-3\%=9\%$, а для другой $6\%+3\%=9\%$). Таким образом, систематическая погрешность МКР для цилиндрических частей отливок и частей в виде плит, расположенных под углом к плоскостям разбивки, при литье в малотеплопроводные формы составляет примерно 8-10% по времени затвердевания.

Для определения аналогичной погрешности для литья в кокиль, были проведены сравнительные расчеты затвердевания цилиндра диаметром 55 мм в кокиле. Для этого случая, кроме того, было проведено термометрирование реального слитка и экспериментально определены свойства материала кокиля и параметров теплопередачи через границу «отливка-форма», которые и использовались в расчетах. Программа «МКР-2» в данном тесте не участвовала, т.к. не содержит возможности в явном виде задать параметры теплового сопротивления между отливкой и формой, что, как показано в [3], делает ее неприменимой для расчетов при литье в металлические формы. Как указывалось выше, можно ожидать, что для литья в высокотеплопроводные (металлические) формы погрешность МКР будет больше, чем при литье в песчаные формы. Результаты расчетов, показанные на рис.8 подтверждают это. «Отставание» разностного решения от экспериментального временем конца затвердевания (которое совпадает с конечно-элементным расчетом) составляет при литье в кокиль около 20% (Или около 17% от ожидаемого «правильного» решения, с учетом исходных 3% отставания от МКЭ на плите.) Следует ожидать, что при литье в водоохлаждаемые формы эта величина приблизится к тем теоретическим 38%, которые были вычислены выше.

Следует понимать, что величины ошибок МКР, которые определены при сравнительных расчетах описанных в данной статье, нельзя считать некоторыми абсолютно точными значениями. Вероятно, эти величины могут колебаться в относительно широких пределах в зависимости от различных условий (свойств сплавов, свойств материалов формы, начальных температурных параметров, граничных условий и т.д.) Однако, проведенные сравнительные расчеты не оставляют сомнений в том, что МКР применительно к ЛП дает постоянную ошибку при наличии любых теплоотводящих поверхностей непараллельных плоскостям разностной разбивки. Причем эта ошибка тем больше, чем более значительную роль играют параметры граничной теплопередачи.

Как указывалось выше, МКР в отличие от МКЭ, требует значительных ресурсов по памяти. Для выяснения зависимости требуемой памяти от количества узлов сетки были проведены расчеты для сеток с различным количеством узлов с фиксацией того количества памяти, которое требовал расчет. В принципе и «МКЭ-Полигон», и «МКР-1» прогнозируют требуемую память на ту или иную дискретизированную геометрию еще до расчета, так что эта работа носила скорее уточняющий характер и в принципе подтвердила правильность прогноза в обеих системах. Для МКЭ требуемая память (как и время затраченное на расчет) не линейно зависит от количества узлов, однако для ориентировки можно рекомендовать следующую зависимость для МКЭ – 1 Мб на каждую тысячу узлов в отливке и форме. Для МКР требуемая память линейно зависит от количества узлов и необходимо 30 Мб на каждый миллион узлов. Время счета для МКР, как показали тестовые расчеты также примерно линейно зависит от количества узлов.

Чтобы сравнительно оценить количество узлов требующееся для МКЭ и МКР при моделировании фасонных отливок, были сгенерированны расчетные геометрические модели разностной и элементной сетки реальной отливки, моделируемой в СМ ЛП «Полигон». При этом исходили из следующего: расчет должен требовать не более 200 Мб оперативной памяти и

дискретность сеток должна обеспечивать примерно одинаковый уровень приближения к «окончательному» решению. Последнее требование было необходимо чтобы приблизительно сравнить время затраченное на расчет при МКЭ и МКР. (Сравнивались только «МКЭ-Полигон» и «МКР-1», т.к. «МКР-2» явно на порядки отстает по скорости вычислений, а кроме того, работа с сетками большой размерности в этой программе настолько затруднена и замедлена, что делает ее применение для реальных фасонных отливок практически невозможной.) Тестирование проводилось на персональном компьютере Р-III, частота процессора 733 МГц, оперативная память 256 Мб. Такая конфигурация наиболее типична для заводов, хотя рекомендуемой конфигурацией, которая в настоящее время обычно используется при выполнении заказов на моделирование ЛП является Р-IV, частота процессора 1700 МГц, оперативная память 512 Мб.

Исходя из выбранного предела по памяти (200 Мб) для МКР была сгенерирована разностная сетка в 6000000 узлов(ячеек) занимающая при расчете 176 Мб. При этом выяснилось, что дискретность сетки недостаточна даже для того, чтобы правильно описать общую геометрию отливки – часть щелевых отверстий в отливке просто исчезла, большинство имеющихся в отливке ребер имели явно неприемлемый вид и все ребра имели дискретность в одну ячейку, что для МКР совершенно недопустимо (см. выше раздел об определении требуемой дискретности разностной сетки). В связи с этим, для сравнения хотя бы скорости вычислений, для МКЭ была также сгенерирована сетка с недостаточной дискретностью, которая хотя и правильно описывала внешнюю конфигурацию отливки, но не имела требуемого количества узлов по толщине ребер. Эта сетка содержала 21600 узлов в отливке и форме и требовала для расчета 22 Мб оперативной памяти. На рис.9 показаны расчетные геометрические модели выбранной отливки в элементном и разностном представлении. Расчет для первых 400 секунд затвердевания для МКЭ длился 12 минут, а для МКР 21 минуту. Таким образом, можно констатировать, что МКЭ требует примерно на порядок меньше памяти, чем МКР и как минимум в 2 раза быстрее считает. (Следует помнить, что в данном случае сетка для МКЭ была гораздо ближе к требуемой дискретности, чем сетка для МКР, так что действительная разница по скорости счета и требуемой памяти скорее всего даже больше.)

Из рис.9 видно, что разностная модель совершенно неудовлетворительна. Чтобы сделать ее приемлемой для адекватного расчета необходимо минимум в 10-15 раз измельчить сетку в горизонтальной плоскости. Это приведет к увеличению общего количества узлов в 100-200 раз, что соответственно увеличит требуемую память до 18000-35000 Мб, что является попросту нереальным.

В противоположность МКР, для МКЭ достижение требуемой дискретности вполне реально. Такая операция потребовала увеличения количества узлов примерно до 60000 и увеличило требуемую память примерно до 60-70 Мб, соответственно время расчета увеличилось примерно до 30 минут.

Еще один аспект, в котором МКЭ отличается от МКР – это размеры файла результатов расчета. При МКЭ файлы результатов расчетов обычно лежат в пределах десятков Мб. Нетрудно подсчитать, что для МКР при количестве узлов порядка миллионов и количества шагов по времени порядка сотни за время затвердевания, файлы результатов расчетов должны занимать сотни мегабайт или даже гигабайты. Практически такие файлы неприменимы при анализе результатов расчетов. Поэтому большинство разностных СМ ЛП такие файлы попросту не записывает, а ограничивается записью нескольких заранее заданных моментов времени и(или) температурных кривых в нескольких заранее заданных точках. Таким образом, как это не удивительно, при использовании разностных СМ ЛП какой бы то ни было осмысленный анализ проделанных расчетов чаще всего попросту невозможен. Те, кто занимается моделированием реальных литейных технологий знают, что без такого анализа моделирование в значительной мере теряет смысл, т.к. главная задача при моделировании – понять каким образом и за счет чего образовался тот или иной дефект, чтобы предложить такое изменение технологии, которое могло бы гарантировать его отсутствие.

Из всего вышеизложенного можно сделать следующие выводы.

1. Метод конечных разностей (МКР) применительно к моделированию тепловых процессов в затвердевающих отливках действительно существенно уступает методу конечных элементов (МКЭ) по всем основным параметрам: адекватности (достоверности) решения, требуемых

ресурсов вычислительной техники, скорости расчетов, возможности эффективно организовать анализ решения после расчетов.

2. В тоже время можно констатировать, что МКР с относительной достоверностью можно применять для моделирования тепловых процессов в отливках несложной конфигурации заливаемых в малотеплопроводные формы. При этом желательно, чтобы в такой отливке было как можно меньше поверхностей не параллельных трем ортогональным плоскостям разбивки. (Проще говоря, чтобы отливка по возможности больше походила на параллелепипед.) Однако при этом следует иметь ввиду, что и в этом случае МКЭ позволит решать аналогичные задачи быстрее и потребует гораздо меньше машинных ресурсов. Кроме того, в любом случае при МКР анализ результатов расчетов будет существенно затруднен.

3. Для отливок сложной фасонной конфигурации и для литья в металлические формы МКР в общем случае применять нельзя, т.к. он дает систематическую погрешность и не позволяет с необходимой дискретностью описать геометрию отливки. (Хотя тут многое зависит от пользователя. Если пользователь достаточно хорошо понимает особенности и погрешности разностного метода, то он может правильно интерпретировать его результаты, а также правильно задать эффективные исходные данные парирующие погрешности.)

4. Метод конечных элементов (МКЭ), в отличие от МКР, может с достаточной достоверностью применяться для всех способов литья и для фасонных отливок практически любой сложности. При этом МКЭ обеспечивает возможности для полноценного анализа результатов расчетов, обеспечивает скорость расчетов как минимум в два раза быстрее, чем МКР и требует примерно в 10 раз меньше оперативной памяти.

И в заключение следует отметить следующее. Из данного описания существенных недостатков разностного метода не следует, что он абсолютно неприменим. Во-первых, лучше использовать МКР, чем не использовать численное моделирование вовсе. Во-вторых, тепловая задача, хотя и основная, но не единственная, решение которой требуется при моделировании литейных процессов. И в-третьих, общие погрешности численных методов в силу сложности литейных процессов и неоднозначности задаваемых параметров и физических свойств таковы, что главным условием успешности применения любой СМ ЛП (хоть элементной, хоть разностной) является понимание физики исследуемого процесса и особенностей тех моделей и алгоритмов, которые применяются при моделировании.

Список литературы

1. **Тихомиров М.Д.** Основы моделирования литейных процессов. Тепловая задача//Литейное производство.-1998.-№ 4.-С.30-34.
2. **Тихомиров М.Д.** Основы моделирования литейных процессов. Усадочная задача//Приложение к журналу «Литейное производство».-2002.-№ 12.-С.8-14.
3. **Тихомиров М.Д.** Основные аспекты решения тепловой задачи при моделировании литейных процессов// Компьютерное моделирование литейных процессов.-Сб. науч. тр. ЦНИИМ, вып. 3.-С.-Петербург, 1998.-С.30-57.
4. **Sahm P.R., Hansen P.N.** Numerical Simulation and Modelling of Casting and Solidification Processes for Foundry and Cast-House, International Committee of Foundry Tehnical Assotiations, 1984. p.253.
5. **Сегерлинд Л.** Применение метода конечных элементов/Пер. с англ. -М., Мир, 1979.-392 с.
6. **Гиршович Н.Г., Нехендзи Ю.А.** Аналитические решения простейших задач о затвердевании отливок разной конфигурации. //Литейное производство. – 1956.- № 3.-С.14-19; № 4.-С.13-17; № 6.-С.13-17; № 12.-С.13-18.
7. **Тихомиров М.Д.** Сравнение тепловых задач в системах моделирования литейных процессов Полигон и ProCAST//Компьютерное моделирование литейных процессов.-Сб. науч. тр. ЦНИИМ, вып. 2.-С.-Петербург, 1996.-С.22-37.

Подрисуночные подписи

Рис.1 Разбивки цилиндра при МКЭ и МКР при близких значениях густоты сетки.

Рис.2 Различная аппроксимация искомой функции при МКЭ и МКР

Рис.3 Пример двумерной сетки МКР и ошибки при определении периметра, которая не зависит от густоты разностной сетки.

Рис.4 Сравнение расчетных температурных кривых для двух конечно-элементных СМ ЛП «Полигон» и ProCAST

Рис.5 Определение необходимой дискретности сетки для МКЭ и МКР

Рис.6 Расчетные температурные кривые для МКЭ и МКР при затвердевании плиты 10 мм в песчаной форме

Рис.7 Расчетные температурные кривые для МКЭ и МКР при затвердевании цилиндра диаметром 45 мм в песчаной форме

Рис.8 Расчетные температурные кривые для МКЭ и МКР при затвердевании цилиндра диаметром 55 мм в кокиле

Рис.9 Сравнительный расчет для МКЭ и МКР реальной отливки

Рисунки вместе с подрисуночными подписями. Просто для ориентировки, т.к. собственно рисунки содержатся в прилагаемых файлах:

tikhomirov_pic1.bmp
 tikhomirov_pic2.bmp
 tikhomirov_pic3.bmp
 tikhomirov_pic4.bmp
 tikhomirov_pic5.bmp
 tikhomirov_pic6.bmp
 tikhomirov_pic7.bmp
 tikhomirov_pic8.bmp
 tikhomirov_pic9.bmp

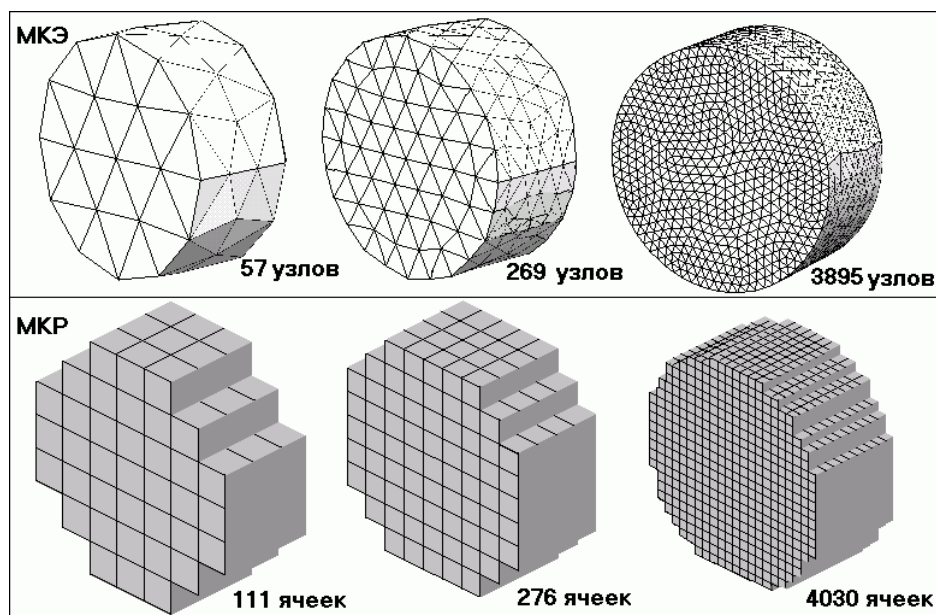


Рис.1 Разбивки цилиндра при МКЭ и МКР при близких значениях густоты сетки.

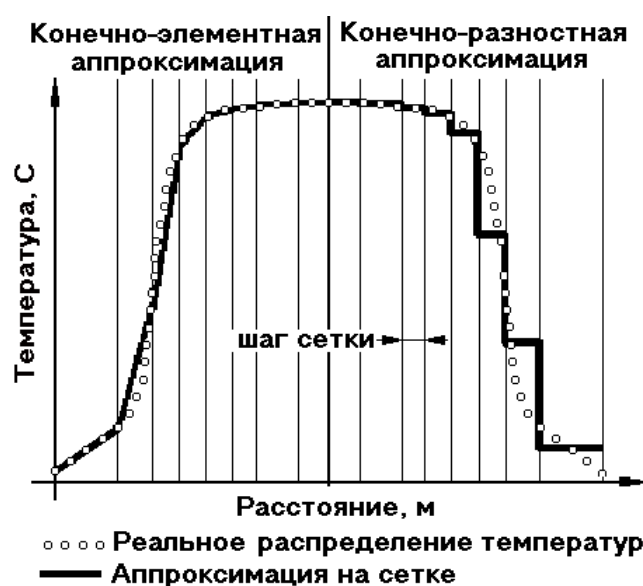


Рис.2 Различная аппроксимация искомой функции при МКЭ и МКР

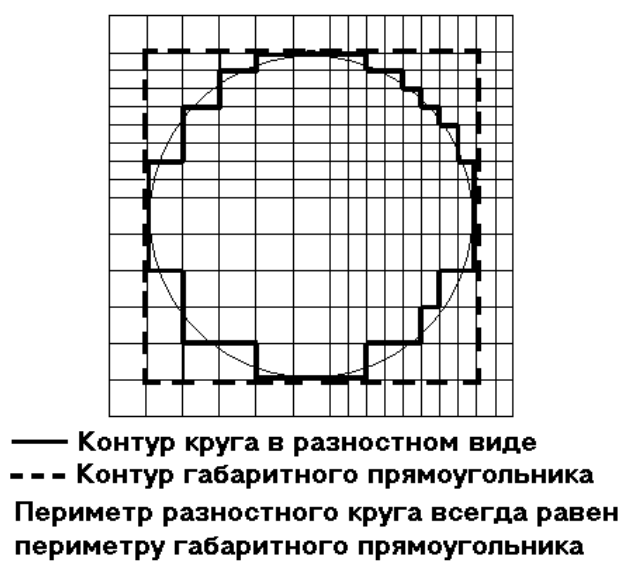


Рис.3 Пример двумерной сетки МКР и ошибки при определении периметра, которая не зависит от густоты разностной сетки.

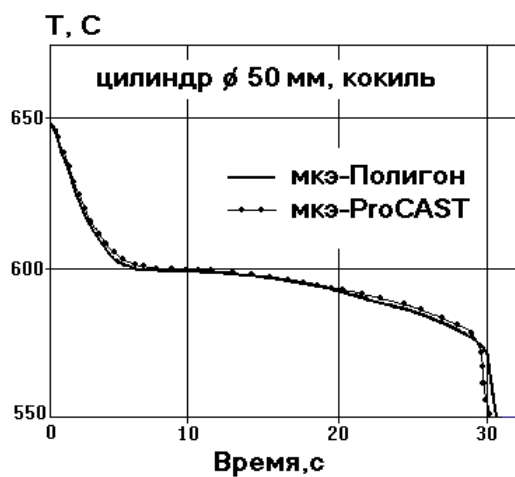


Рис.4 Сравнение расчетных температурных кривых для двух конечно-элементных СМ ЛП «Полигон» и ProCAST

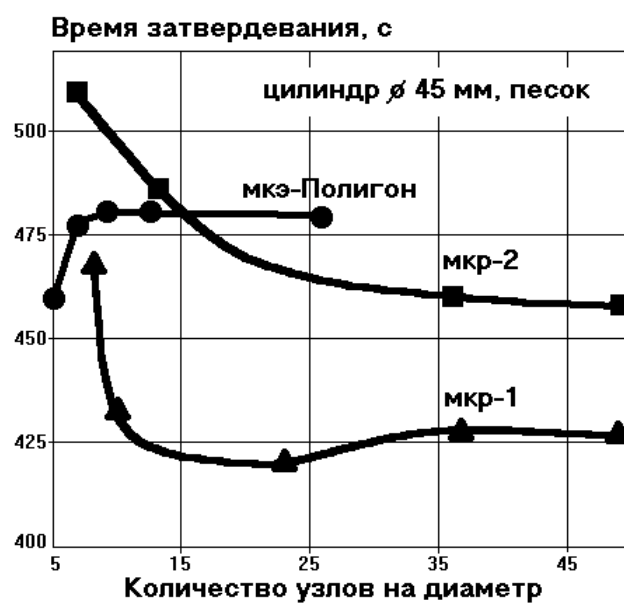


Рис.5 Определение необходимой дискретности сетки для МКЭ и МКР

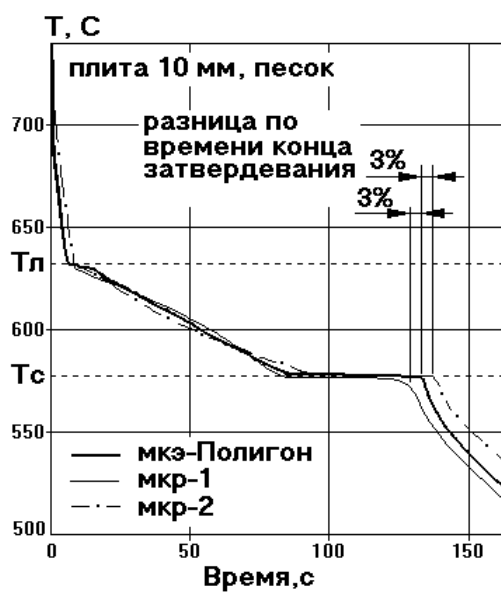


Рис.6 Расчетные температурные кривые для МКЭ и МКР при затвердевании плиты 10 мм в песчаной форме

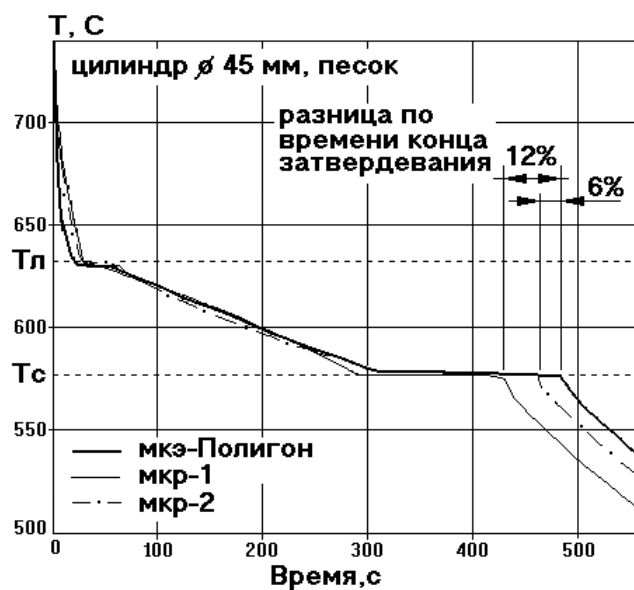


Рис.7 Расчетные температурные кривые для МКЭ и МКР при затвердевании цилиндра диаметром 45 мм в песчаной форме

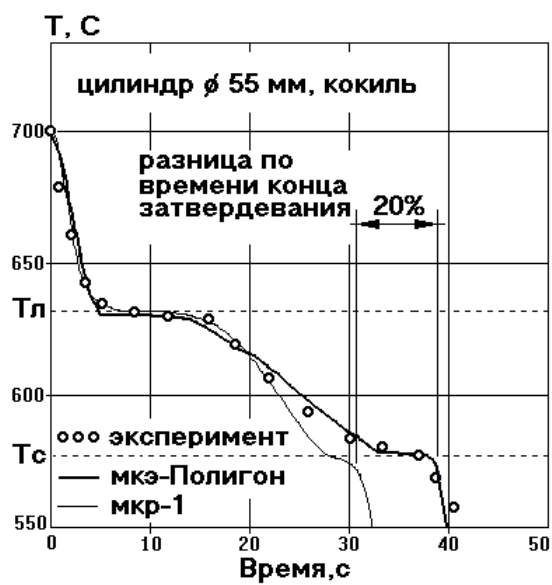
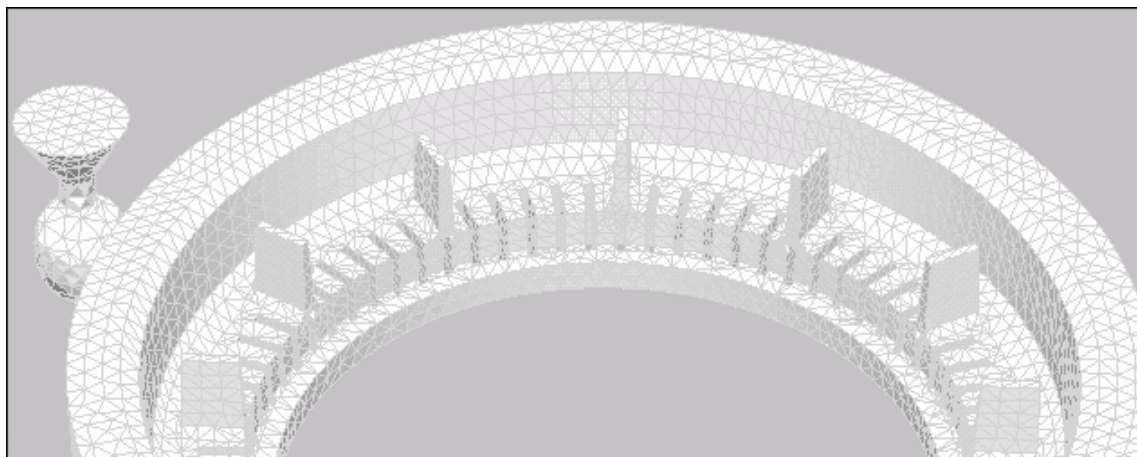
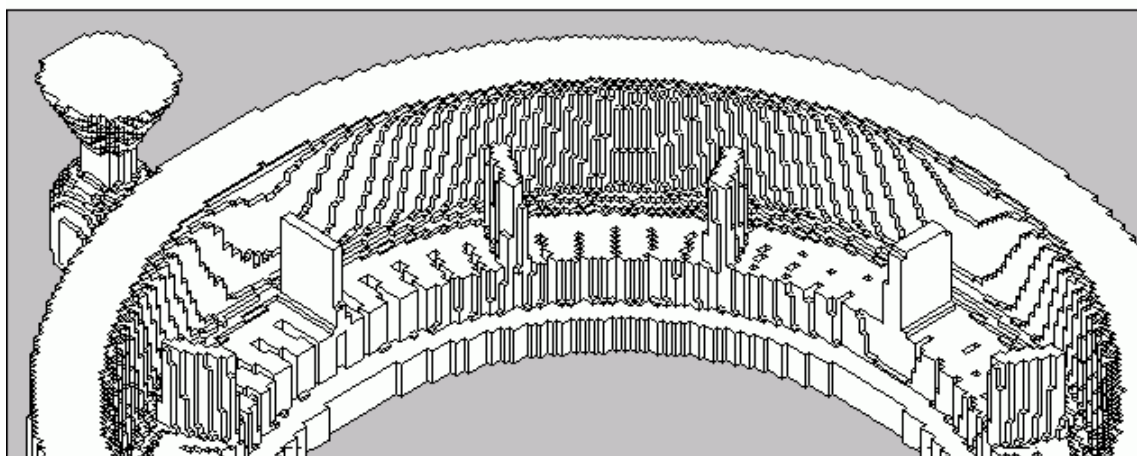


Рис.8 Расчетные температурные кривые для МКЭ и МКР при затвердевании цилиндра диаметром 55 мм в кокиле



МКЭ-Полигон: 21600 узлов в отл.и форм., треб.память 22 Мб, время расчета 12 минут, шаг 2.5 с. (на Р-III, 733 МГц)



МКР-1: 6000000 узлов в отл.и форм., треб.память 176 Мб, время расчета 21 минута, перем. шаг 0.1-5с. (на Р-III, 733 МГц)

Рис.9 Сравнительный расчет для МКЭ и МКР реальной отливки