

М.Д.Тихомиров, Д.Х. Сабилов, А.А. Абрамов (ЦНИИ Материалов, Санкт-Петербург, 2002 г.)

физико-математические основы компьютерного моделирования литейных процессов. система моделирования «полигон»

Большинство прикладных задач моделирования литейных процессов (ЛП) не имеет строгого аналитического решения. При принятии ряда допущений, обычно возможно построение достаточно адекватных аналитических моделей для конкретных условий, например, для тел простейшей конфигурации [1]. Как составные части численных алгоритмов аналитические модели необходимы и при решении задач для общих случаев.

Однако, в настоящее время наиболее универсальным и эффективным способом решения задач моделирования сложных физических процессов, в частности задач теории литейных процессов (ТЛП), являются численные методы [2,3].

В связи с этим компьютерные системы для численного моделирования ЛП стали коммерческим продуктом [4,5], который приобретают и применяют на заводах. В то же время очевидный дефицит профессиональных моделирующих систем ЛП (особенно в научных и учебных заведениях) породил вокруг численного моделирования множество устойчивых ложных представлений. Достаточно часто численное моделирование считают не элементом повседневной исследовательской работы, а одним из узкоспециальных подходов, к тому же не очень достоверным. При этом нередко под моделированием подразумевают давно устаревшие численные постановки и физико-математические модели. Другая крайность (характерная для производственных предприятий) состоит в убеждении, что с помощью компьютерного моделирования можно автоматически абсолютно достоверно учесть все технологические параметры и протекающие процессы. При этом часто подразумевается, что если это не обеспечивается, то дело не в современном уровне возможностей теории и техники и не в уровне подготовки пользователей, а в субъективных недостатках конкретной системы. Обе эти крайние точки зрения не соответствуют действительности и часто мешают эффективно использовать возможности систем компьютерного моделирования ЛП как на производстве, так и в научно-исследовательских целях.

В то же время российская литейная школа в 1950-1970 годах подготовила очень хороший фундамент для возможности полноценного развития и использования ТЛП [2] и в первую очередь ее наиболее современного и эффективного раздела – численного моделирования ЛП. Этот фундамент позволил некоторым российским предприятиям занять лидирующее положение в области моделирования ЛП не только в России, но фактически и в мире. Одним из таких предприятий в настоящее время безусловно является Центральный Научно Исследовательский Институт Материалов (ЦНИИМ). Это не совсем очевидный факт, особенно для западных литейщиков, однако на российском рынке западные литейные системы просто не в состоянии конкурировать с лучшими российскими разработками ни по возможностям адекватного моделирования, ни по чисто пользовательским свойствам определяемым качеством программного интерфейса с пользователем, что и подтверждает статистика продаж литейных систем на российском рынке. Неочевидность такого положения происходит из-за того, что с точки зрения коммерческого использования, российские разработки в области моделирования ЛП мягко говоря не очень популярны на западе из-за практически полного отсутствия там информации о российских достижениях в области ТЛП в советский период. Но в тех случаях, когда предприятия имеют реальную возможность объективно сравнить лучшие западные и лучшие российские системы моделирования ЛП (а это в основном российские предприятия), они безусловно предпочитают российские системы.

В ЦНИИМ начиная с 1989-1990 годов ведутся интенсивные разработки в области моделирования ЛП. Необходимость таких исследований была продиктована сложными задачами по разработке литейных технологий обеспечивающих гарантированное качество литых изделий специального назначения чаще всего получаемыми специальными способами литья и имеющими очень жесткие требования по качеству. В 1989 г. в ЦНИИМ в рамках тематики Министерства Обороны Промышленности (МинОборонПром) была создана первая версия системы компьютерного моделирования ЛП «Полигон». С помощью этой системы были решены ряд важных за-

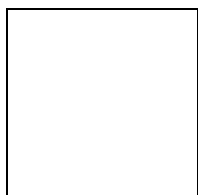
дач стоящих перед предприятиями МинОборонПром, Департамента Промышленности Вооружений, а в настоящее время Российского Агентства по Обычным Вооружениям. Кроме того, с помощью «Полигона» решались задачи для предприятий Российского Космического Агентства и предприятий Аэрокосмического комплекса, в т.ч. применительно к литым деталям ракетных двигателей носителей «Протон» и «Русь». В период конверсии и коммерциализации лицензии на использование различных версий «Полигона» были приобретены рядом крупных предприятий автомобилестроительного комплекса. Например такими как ВАЗ, КАМАЗ, УАЗ, а также многими другими заводами выпускающими гражданскую продукцию. В различное время «Полигон» использовался и используется в ряде высших учебных заведений имеющих литейные и металлургические кафедры, таких как Петербургский Институт Машиностроения, Минский ГТУ, Тульский ГТУ, Самарский ГТУ, Тольяттинский ГТУ, Комсомольско-Амурский ГТУ и др. В настоящее время «Полигон» является наиболее популярной литейной системой на российском рынке. По количеству приобретенных лицензий на предприятиях России и СНГ «Полигон» в несколько раз опережает все западные литейные системы вместе взятые, включая такие наиболее известные как MagmaSoft и ProCAST.

Основные проблемы при использовании систем моделирования в качестве рабочего инструмента связаны со стремительностью эволюции всех областей, связанных с компьютерным моделированием. Быстрый рост возможностей моделирования ЛП вызвал трудности не только с его освоением в производстве. Возникли и трудности с осознанием литейщиками-исследователями того факта, что на сегодняшний день численное моделирование является одним из самых мощных методов исследования в прикладной физике, разделом которой собственно является ТЛП. Неоднозначность ситуации усугубляется тем, что эра классических детерминированных численных моделей подходит к концу. На смену им уже появляются «численно-вероятностные» модели, которые (по соображениям общего порядка) должны обеспечить более высокую адекватность. (При этом, скорее всего, требования к теоретической подготовке пользователей станут еще более жесткими.)

Как уже указывалось выше, физико-математические модели применяемые в моделировании ЛП и разрабатываемые создателями систем моделирования, являются по сути основой современной ТЛП. Для эффективного использования компьютерных систем моделирования литейщик-технолог и литейщик-исследователь должен быть по крайней мере знаком с этими моделями, т.е. знать основы современной литейной теории. Некоторой попыткой восполнить недостаток информации по вопросам численного моделирования ЛП и является данная публикация. Здесь мы рассмотрим некоторые общие вопросы численного моделирования, связанные с применением различных математических методов расчета при решении литейных задач, а также физико-математические модели для решения тепловой и усадочной задач, разработанные специалистами ЦНИИМ в рамках создания и совершенствования системы моделирования ЛП «Полигон».

В численных методах и алгоритмах есть определенная специфика. С одной стороны не требуются специальные упрощения исходных постановок, с другой стороны обычно для численного решения приходится формулировать внутренние подмодели с учетом того конкретного численного метода, который предполагается применить. Это несколько снижает универсальность таких моделей, но зато позволяет наиболее полно применить представления о физике процесса.

Одним из основных вопросов моделирования литейных процессов является решение задачи охлаждения и затвердевания отливки произвольной конфигурации. Численные методы позволяют решить эту задачу на основе исходного (т.е. без упрощений характерных для аналитических решений) уравнения нестационарной теплопроводности с соответствующими граничными условиями [7]:



(1)

где x, y, z - координаты в области пространства, ограниченного поверхностью S ; n - нормаль к поверхности S ; t - время; T - функция температурного распределения в пространстве координат x, y, z, t ; K_x, K_y, K_z, K_n - теплопроводность в направлении осей x, y, z и нормали n соответственно; qv - объемная мощность внутренних источников теплоты; C_v - объемная теплоемкость; q_n - граничный тепловой поток (по нормали к S); α - коэффициент граничной конвективной теплопередачи в среду с температурой T_{air} .

При решении задачи затвердевания, наиболее важное значение имеет то, насколько адекватно организован учет ВЫДЕЛЕНИЯ СКРЫТОЙ ТЕПЛОТЫ и ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ ЧЕРЕЗ ГРАНИЦУ сопряжения отливки и формы.

Для большего числа сплавов величину скрытой теплоты и зависимость температуры от доли твердой фазы можно считать характеристикой сплава. Т.е. скрытая теплота и характер ее выделения предполагаются постоянными. Это справедливо в случае, когда существует устойчивая однозначная зависимость тепловыделения от количества твердой фазы в широком интервале скоростей охлаждения, что характерно для АЛЮМИНИЕВЫХ сплавов, большинства видов СТАЛЕЙ и др. В этом случае наиболее важен адекватный учет неравномерности тепловыделения в интервале температур затвердевания. Применение для этого различных функциональных зависимостей связывающих количество твердой фазы с диаграммами состояния сплавов чаще всего малоэффективно и крайне неадекватно отражает действительный характер тепловыделения для реальных НЕРАВНОВЕСНЫХ условий. В связи с этим, рациональным методом учета зависимости процентного количества выделившейся твердой фазы (и относительной теплоты) от температуры является применение кусочно-непрерывных зависимостей на 5..10 неравномерных подинтервалах. Это позволяет задавать самые разнообразные характеры тепловыделения, в том числе с резкими перегибами, площадками и т.п. Конкретное выражение вида такой кусочно-непрерывной зависимости удобно делать в виде СПЕКТРА ВЫДЕЛЕНИЯ ТВЕРДОЙ ФАЗЫ. Совместно с уравнением аппроксимации на подинтервале этот спектр составляет МОДЕЛЬ УЧЕТА ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЯ:

$$i = 1..n;$$

$$Ps(i) = Ps(1), Ps(2), \dots, Ps(n); \quad Ps(1) = 0; Ps(1) \leq Ps(i+1); Ps(n) = 1;$$

$$T(i) = T(1), T(2), \dots, T(n); \quad T(1) = T_{liq}; T(i) \geq T(i+1); T(n) = T_{sol}; \quad (2)$$

$$T(Ps) = F(i, i+1) \quad \text{при} \quad Ps(i) < Ps < Ps(i+1);$$

$$Q(Ps) = L * Ps,$$

где i - номер точки в спектре выделения твердой фазы; $Ps(i)$, $T(i)$ - доля твердой фазы и температура соответственно в точке i (спектр выделения твердой фазы); T_{liq} , T_{sol} - температуры ликвидуса и солидуса соответственно; $Q(Ps)$ - количество выделившейся теплоты при доле твердого Ps ; L - скрытая теплота затвердевания; $F(i, i+1)$ - функция аппроксимирующая зависимость T от Ps на подинтервале от i до $i+1$.

Вид функции $F(i, i+1)$ зависит от аппроксимирующего уравнения применяемого в подинтервале. При достаточном количестве точек вполне достаточно линейного уравнения.

Наибольшую достоверность обеспечивает экспериментальный спектр тепловыделения. Методика его определения состоит в пересчете на тепловыделение опытной температурной кривой специальной пробы, примерно так же, как это делается при определении скрытой теплоты затвердевания [16]. Поскольку определение скрытой теплоты сплава необходимо в любом случае, то опытное определение спектра не требует дополнительных экспериментов. Можно показать, что даже для простейших бинарных сплавов расчет спектра тепловыделения по диаграмме состояния приводит к дополнительным ошибкам, которые легко избежать используя экспериментальный спектр. На рис.1 показаны «опытный» и «диаграммный» спектры тепловыделения для двойного сплава системы Al-Si при 5% Si. Расчет «диаграммного» спектра велся на основе равновесной диаграммы состояния Al-Si (рис.2) по «правилу рычага». На рис.1 видно, что спектр определенный по диаграмме не только не учитывает тепловыделение на ликвидусе, но и дает отклонение по количеству выделяющегося тепла на солидусе при затвердевании эвтектики.

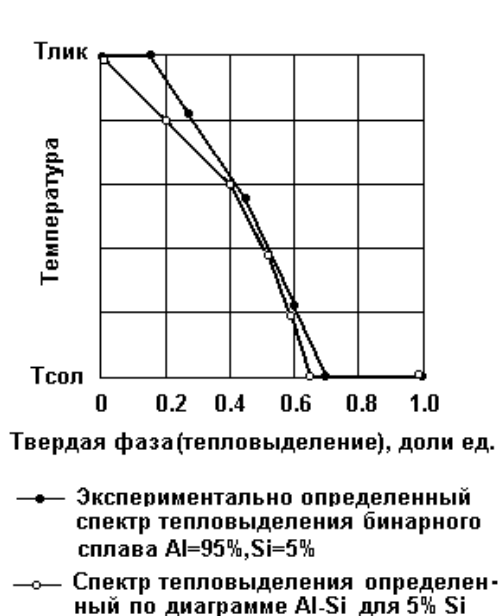


Рис.1

Спектр тепловыделения для сплава Al-Si.

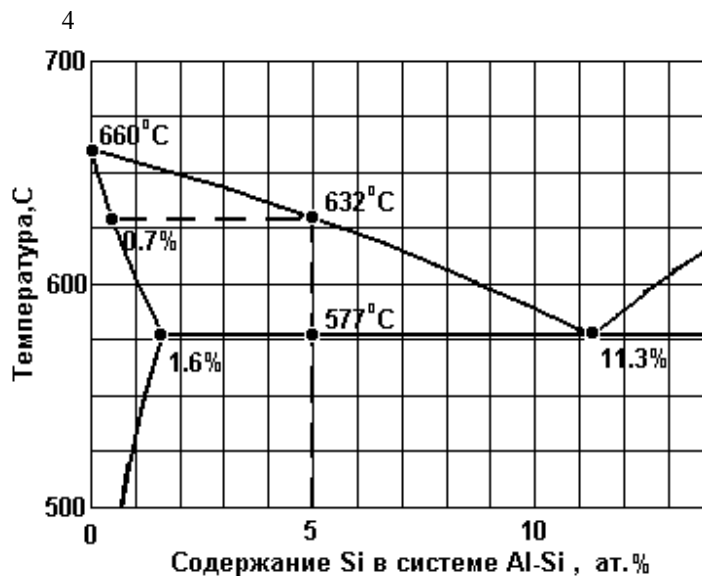


Рис.2

Диаграмма состояния системы Al-Si.

Отклонения в задаваемом спектре соответственно дает отклонения при численном решении тепловой задачи. На рис.3 приведены опытная и расчетные кривые охлаждения в интервале затвердевания в центре слитка Ø45мм из сплава Al-5%Si заливаемого в песчаную форму. (Расчеты проводились в САМ ЛП «Полигон».) Опытная кривая на рис.3 является той кривой, по которой определялись скрытая теплота и спектр ее выделения. Понятно, что в этом случае расчет с экспериментально определенным спектром должен совпасть с опытом (если все другие параметры учитываются правильно). Именно это и наблюдается на рис.3. Расчет же с «диаграммным» спектром отличается от реальной кривой, особенно в начале затвердевания. Аналогичная картина будет наблюдаться и при моделировании затвердевания других отливок с теми параметрами, которые были определены по опытной температурной кривой пробы на рис.3. На рис.4 приведены опытная и расчетные кривые охлаждения в интервале затвердевания в центре слитка Ø55мм из сплава Al-5%Si, заливаемого в кокиль. При сравнении расчетных кривых с экспериментальными видно, что отклонения от реальной кривой при «диаграммном» спектре существенно больше, чем при «опытном». Аналогичные результаты можно было бы продемонстрировать и для других составах в системе Al-Si, а также для систем Al-Mg, Al-Zn, Al-Cu.



Рис.3

Опытная и расчетные кривые охлаждения для центра слитка Ø45мм из сплава Al-5%Si, заливаемого в песчаную форму.

Рис.4

Опытная и расчетные кривые охлаждения для центра слитка Ø55мм из сплава Al-5%Si, заливаемого в кокиль.

В рассмотренном выше случае расчет «диаграммного» спектра тепловыделения велся простейшим образом по «правилу рычага». Существуют зависимости позволяющие учесть неравновесный характер процессов и изменение истинного содержания компонентов в процессе затвердевания. В этом случае появляется возможность рассчитать тепловыделение на ликвидусе и другие особенности реального тепловыделения. Однако, такого рода зависимости в действительности могут быть применены ТОЛЬКО ДЛЯ ПРОСТЕЙШИХ БИНАРНЫХ СПЛАВОВ. Для реальных многокомпонентных сплавов в условиях гетерогенной кристаллизации адекватный расчет спектра выделения твердой фазы по сложности сравним с собственно решением тепловой задачи, и, кроме того, в настоящее время в сущности не обеспечен надежными данными по диаграммам многокомпонентных систем. Применение же к сложному сплаву относительно простых зависимостей, таких как для бинарных систем, всегда ПРИВОДИТ К СУЩЕСТВЕННЫМ ОТЛИЧИЯМ ОТ РЕАЛЬНОГО СПЕКТРА ТЕПЛО ВЫДЕЛЕНИЯ.

Для ряда сплавов, например для СЕРЫХ ЧУГУНОВ [8] величина выделяющейся скрытой теплоты зависит от хода охлаждения. Для подобных сплавов необходимо формулировать модель учета абсолютного количества теплоты от параметров затвердевания и кристаллизации. В этом случае уравнения (2) необходимо дополнить уравнением вида:

$$L=F(dn_{Ps}/dt, dPs/dt,...), \quad (3)$$

где dn_{Ps}/dt - пространственная скорость затвердевания (скорость продвижения некоторой изолинии Ps или усредненная скорость); dPs/dt - скорость нарастания количества твердой фазы (аналогична скорости охлаждения dT/dt).

Если же сам характер тепловыделения или его температурные составляющие (T_{liq} , T_{sol} и др.) могут меняться, то спектр тепловыделения также может быть переменным: $T(i)=F(dT/dt,...)$.

Второй после тепловыделения важнейший аспект - учет условий теплопередачи между отливкой и формой. Очевидно, что для правильного учета контактного теплообмена необходим РАСЧЕТ ТЕПЛОВЫХ ПОЛЕЙ КАК В ОТЛИВКЕ, ТАК И В ФОРМЕ.

При численном моделировании ЛП традиционно использовали две крайних модели граничной теплопередачи, одна из которых предполагает наличие абсолютно плотного контакта между отливкой и формой, а другая предполагает постоянное наличие газового зазора одинаковой толщины. Обе эти модели не соответствуют реальному положению вещей и могут применяться только для каких-то конкретных условий. Модель с ПЛОТНЫМ КОНТАКТОМ хорошо подходит для случая малотеплопроводной массивной формы, что соответствует случаю ЛИТЬЯ В ПЕСЧАНЫЕ ФОРМЫ. В случае использования МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ФОРМ или наружных металлических холодильников правильнее работает модель теплопередачи, предполагающая наличие зазора (ТЕПЛОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ). Эта модель позволяет описать широкий спектр видов литья, но величина теплового сопротивления будет соответствовать реальным величинам толщины зазора только для случаев затвердевания крупногабаритных отливок ПРОСТОЙ КОНФИГУРАЦИИ с существенной линейной термической усадкой.

Объединяющей два описанных выше случая является модель, предполагающая одновременное существование равномерно РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ПЯТЕН ПЛОТНОГО КОНТАКТА И ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ ЧЕРЕЗ ЗАЗОР, что соответствует общему случаю контактного теплообмена [9]. Как показали численные расчеты и экспериментальные данные по определению относительной площади контакта и величины зазора по неконтактной поверхности, такой подход позволяет оперировать величинами, приближающимся по своим значениям к реальным физическим величинам [10]. Это особенно важно для способов литья, предполагающих непосредственное влияние технологических факторов (давление, вакуумирование и т.п.) на граничную теплопередачу.

Механизм контактной теплопередачи в общем случае включает в себя теплопередачу теплопроводностью, конвекцией и лучеиспусканием. В реальном случае для границ "отливка-

форма", "отливка-среда" и "форма-среда" могут параллельно протекать все три вида теплопередачи. При этом на одном и том же макро-участке границы эти тепловые потоки могут протекать на разных относительных площадях при наличии пятен плотного контакта. Кроме того, параметры теплопередачи (коэффициент черноты, коэффициент теплопередачи, толщина зазора, относительные площади и др.) могут зависеть от изменяющихся температур отливки, формы и среды. К этому надо добавить, что на поверхностях контакта отливки и формы чаще всего присутствуют окисные пленки и специальные литейные краски. В модели теплопередачи можно предполагать одинаковую температуру по контактной и неконтактной площади, т.к. речь идет о равномерно распределенной площади на микроуровне в рамках каждого отдельно взятого макро-участка границы.

Суммируя все вышеперечисленные соображения, при некоторых допущениях пользуясь уравнениями для многослойных стенок [11], можно вывести уравнение для коэффициента теплопередачи β , характеризующего теплопередачу между сопрягаемыми поверхностями. Это и будет **МОДЕЛЬ УЧЕТА ГРАНИЧНОЙ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ**:

$$\beta = \frac{1}{\frac{1}{Sk \cdot a_k + Sg \frac{Kg}{Dg} + Sr \cdot \epsilon \cdot Co \frac{T_c^4 - T_m^4}{T_c - T_m}} + \frac{Dp}{Kp}}, \quad (4)$$

$Sk, a_k, Sg, Dg, Dp, Sr, \epsilon, = F(Ps, T, P, \dots)$,

где Sk, Sg, Sr - относительные площади контакта, зазора и лучистой теплопередачи соответственно (в обычном случае $Sr = Sg$); a_k - коэффициент теплопередачи в зоне контакта; Kg, Kp - теплопроводности зазора и межконтактной прослойки (краски или окисной пленки) соответственно; Dg, Dp - толщина зазора и межконтактной прослойки соответственно; $\epsilon = F(\epsilon_c, \epsilon_m)$ - эквивалентная суммарная степень черноты сопряженных поверхностей отливки и формы, зависящая от степени черноты отливки ϵ_c и степени черноты формы ϵ_m ; Co - постоянная Больцмана; T_c - температура сопрягаемой поверхности отливки; T_m - температура сопрягаемой поверхности формы или температура среды для случая теплопередачи в среду; $F(Ps, T, P, \dots)$ - функция зависимости параметров граничной теплопередачи от доли твердой фазы Ps , температуры T , давления P или других технологических параметров.

Для приближенных расчетов суммарный коэффициент теплопередачи можно задавать просто одним числом. Как показал опыт моделирования и сравнения расчетных данных с опытными, для обычных способов литья усредненный коэффициент теплопередачи между отливкой и формой составляет порядка $1000 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ и для песчаных, и для металлических форм. С помощью опытных температурных кривых простых проб можно уточнять эту величину для конкретных сплавов и условий литья. Однако, для уточненных расчетов и при повышенной ответственности за достоверность результатов моделирования следует использовать более сложные модели типа представленной выше. В связи с тем, что в вопросе граничной теплопередачи часто допускаются ошибки и ввиду его большого влияния на адекватность моделирования (особенно для металлических форм) имеет смысл рассмотреть его подробнее.

Традиционно литейщики привыкли пользоваться понятием «зазора между отливкой и формой», введенным еще классиками литейной науки - Вейником, Гиршовичем, Нехендзи и др. В свое время это действительно позволило сделать тепловые модели более адекватными. Если понимать под зазором некоторое тепловое сопротивление зависящее от температуры или доли твердой фазы, то это понятие не устарело и сейчас. Однако, представление о реально существующем непрерывном зазоре при построении моделей теплопередачи неизбежно приведет к принципиальным ошибкам.

Действительно, невозможно предположить, что отливка висит в воздухе. Предполагать, что отливка «встанет на дно» или «повиснет» на каких-то выступах можно только для массивных слитков очень простой конфигурации. Совершенно очевидно, что микро- и макроскопические термические деформации приведут к таким отклонениям в геометрии, которые как минимум бу-

дут сравнимы с возможным термическим уменьшением линейных размеров отливки. Одинаковый порядок этих величин обеспечивается тем, что причина в обоих случаях одна - термическая усадка. При сложной конфигурации отливки это приводит к существованию пятен относительно плотного контакта по всей поверхности сопряжения отливки и формы.

На первый взгляд кажется, что если пятна плотного контакта будут занимать небольшой процент по общей теплоотводящей площади, то их влиянием можно пренебречь. Однако, это не так. На самом деле относительно ПЛОТНЫЙ КОНТАКТ НА ОЧЕНЬ НЕБОЛЬШОЙ ЧАСТИ ТЕПЛООТВОДЯЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ МОЖЕТ СУЩЕСТВЕННО УМЕНЬШИТЬ ВРЕМЯ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ. На рис.5 приведена номограмма, показывающая зависимость относительного времени затвердевания от значений площади контакта и величины зазора для алюминиевого слитка $\varnothing 45$ мм в стальной форме. (Расчеты проводились в системе «Полигон».) За единицу принято время конца затвердевания при 100% плотного контакта, теплопроводность среды (воздуха) в зазоре принята 0.05 Вт/(м*К), заливка предполагалась мгновенной, без перегрева. Как показали расчеты, коэффициент теплопередачи величиной 30000 Вт/(м²*К) соответствует абсолютно плотному контакту; эта величина и использовалась для учета теплопередачи по площади плотного контакта. Таким образом, воздушный зазор до 0.0017 мм (отношение теплопроводности зазора и коэффициента теплопередачи) неотличим от контакта. Это подчеркивает тот факт, что понятие «плотный контакт» характеризует не физическую сущность явления на микро уровне, а интенсивность теплопередачи. Для основной части приведенных на рис.5 графиков предполагалось, что площадь плотного контакта равномерно распределена по всей границе, т.е. контактные и неконтактные участки имеют одинаковую температуру. Это является некоторым упрощением, позволяющим более удобно организовать ввод исходных параметров граничной теплопередачи. Для примера в номограмме показаны результаты расчетов, при которых поверхность плотного контакта задавалась отдельными границами, т.е. температуры по контактным и неконтактным участкам могли отличаться. Как это видно из рис.5 это уточнение не приводит к существенному изменению результатов. Что бы оценить возможные величины зазора в реальности, можно упомянуть, что теоретическая термическая усадка такого слитка должна дать после охлаждения до 20⁰ С зазор около 0.3 мм. (Исходя из коэффициента линейного термического расширения для алюминия $22 \cdot 10^{-6}$ 1/К.) Из рис.5 видно, что площадь контакта всего в 1% в условиях металлической формы существенно влияет на тепловые процессы в отливке и ее нельзя не учитывать.

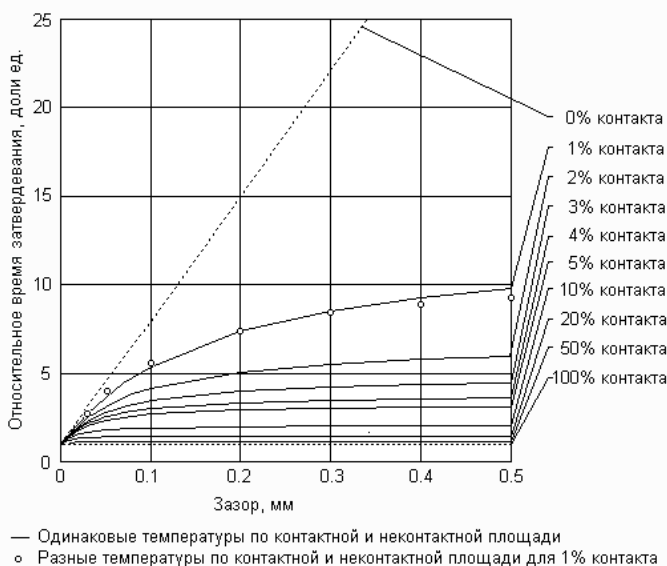


Рис.5

Номограмма показывающая зависимость времени затвердевания от площади контакта и толщины зазора

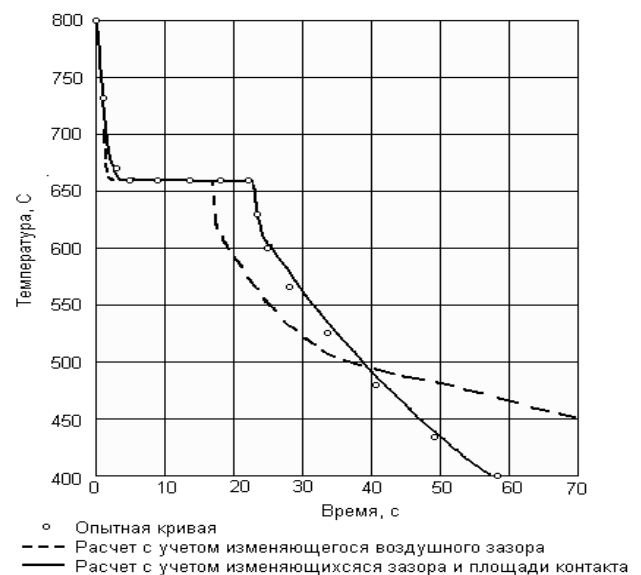


Рис.6

Сравнение температурных кривых для центра алюминиевого слитка $\varnothing 45$ мм в стальной форме при разных моделях граничной теплопередачи

Таким образом, даже из самых общих соображений, приведенных выше, вычислять коэффициент теплопередачи (или теплового сопротивления) между отливкой и формой с позиций «чистого зазора» нельзя. Для определения возможных параметров граничной теплопередачи при затвердевании в ЦНИИ Материалов в 1988-89 г. было проведено исследование, основанное на прямых наблюдениях за контактной поверхностью в процессе затвердевания. (Эти исследования понадобились для обеспечения моделирования ЛП в отливках специального назначения из высокопрочных алюминиевых сплавов.) Заливались слитки $\varnothing 40-60$ мм из легкоплавких металлов (свинец, сплав Вуда) в тонкостенные формы из термостойкого стекла. При этом через бинокулярный микроскоп проводилось фотографирование формирующейся контактной поверхности с одновременным снятием температурных кривых. На рис.7 приведены фотографии поверхности контакта. Из приведенных изображений видно, что даже в жидком состоянии нет «чистого контакта» и даже в твердом нет «чистого зазора». Наблюдения за контактной поверхностью показали, что «отход» отливки от формы происходит случайными пятнами, в основном при затвердевании и этот процесс носит ярко выраженный дискретный характер. Достаточно неожиданно оказалось, что оставшиеся пятна плотного контакта существуют неизменно и при полном охлаждении отливки. (После выстаивания в течении нескольких дней пятна контакта остаются блестящими и в отличие от остальной поверхности не покрываются окисной пленой.)

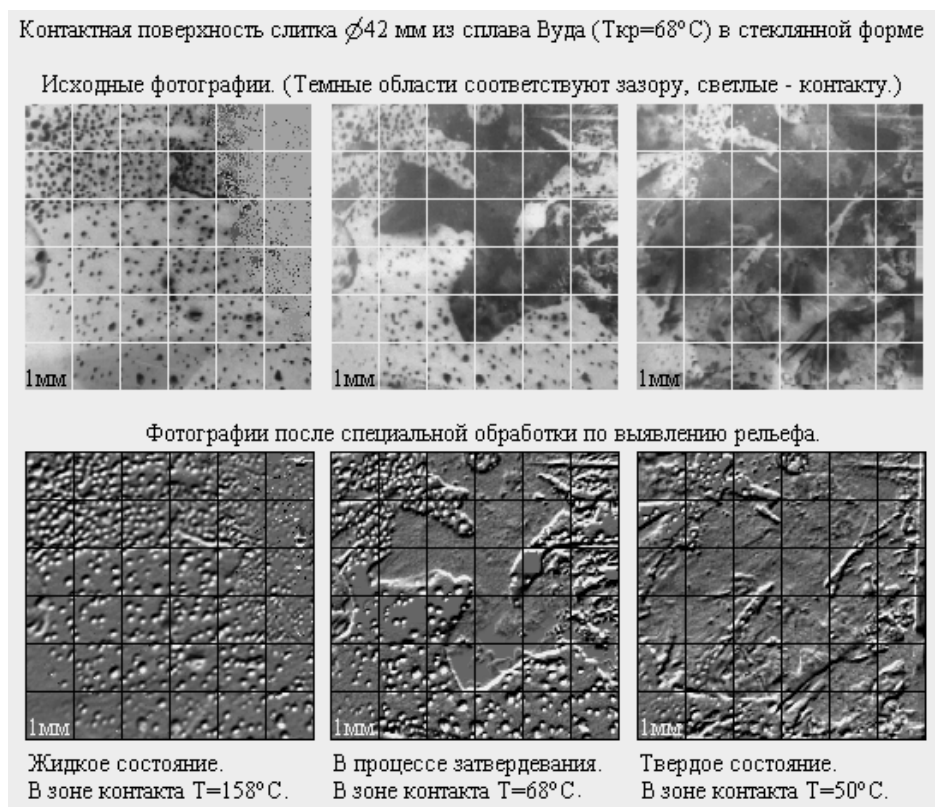


Рис.7

Формирование поверхности сопряжения отливки с формой в процессе затвердевания.

Путем дополнительных экспериментов с алюминиевыми сплавами [10] и численных расчетов удалось распространить полученные данные на условия затвердевания алюминиевых сплавов в металлических формах. Краткие выводы таковы. В жидком состоянии площадь плотного контакта составляет около 70%, по остальной площади средняя величина зазора не менее 0.05 мм. Даже в случае простых цилиндрических отливок в период затвердевания и до полного охлаждения присутствуют равномерно распределенные пятна плотного контакта с площадью около 3%. Величина зазора меняется от 0.05 мм (условно) в жидком состоянии до некоторой величины, зависящей от объемной усадки при затвердевании, линейных размеров и коэффициента термического расширения (усадки). При определении площади контакта и величины зазора возможно пользоваться различными зависимостями, связывающими площадь контакта и зазор через пара-

метры некоторого реального (для формы) или эффективного (суммарного для отливки и формы) рельефа бороздчатого или шахматного типа.

(Вообще опыты со стеклянными формами дали много дополнительных и неожиданных фактов. Некоторые из них даже трудно интерпретировать. Например, оказалось, что в жидком состоянии контактная поверхность очень устойчива и совершенно не реагирует на интенсивное перемешивание. Создается впечатление, что в тонком слое у стенки формы жидкий металл даже при больших перегревах ведет себя как очень вязкая каша. Что это означает - некоторое «псевдотвердое» состояние или просто окисную пленку - непонятно. Учитывая, что пятна контакта после полного охлаждения длительное время остаются «зеркальными», т.е. герметично изолированными, ответ не так очевиден. Если задуматься о кристаллизации такого приграничного слоя металла, то вероятно можно придти к совершенно неожиданным представлениям и идеям.)

Можно показать, что даже для простейших цилиндрических слитков использование моделей «чистого зазора» и «чистого контакта» приводит к ошибкам, которые можно избежать при моделях предполагающих одновременное существование зазора и контакта. На рис.6 приведены опытная и расчетные кривые охлаждения в центре алюминиевого слитка $\varnothing 45$ мм в стальной форме.

В одном случае предполагалось, что при жидком и твердо-жидком состоянии поверхности отливки имеется 100% контакта, а при переходе поверхности в твердое состояние образуется непрерывный воздушный зазор с теплопроводностью $0.05 \text{ Вт/(м}^*\text{К)}$, который увеличивается в соответствии с падением температуры поверхности отливки и коэффициентом линейной термической усадки $22 \cdot 10^{-6} \text{ 1/К}$.

В другом случае использовалась «зазорно-контактная» модель теплопередачи с параметрами описанными выше. Предполагалось, что при жидком состоянии поверхности отливки на границах сопряжения присутствует 70% контакта и зазор 0.05 мм. Далее, при начале затвердевания площадь контакта уменьшается по линейному закону в зависимости от доли твердой фазы и при доле твердой фазы 0.5 контактная площадь достигает 3%. Далее контактная площадь не меняется вплоть до полного охлаждения. Толщина зазора в твердом состоянии увеличивается в соответствии с температурой поверхности и термической усадкой.

Из рис.6 видно, что расчет с использованием модели с одновременным существованием зазора и контакта хорошо соответствует опытным данным. В случае же использования непрерывного зазора и 100% контакта параметры граничной теплопередачи явно не соответствуют действительности. По кривой можно понять, что в начале интенсивность теплопередачи больше реальной, а при увеличении зазора быстро становится слишком низкой. Из-за этого общее время затвердевания слитка и наклон кривой в твердом состоянии существенно отличаются от реальных.

Одним из наиболее современных и часто применяемых численных методов для решения задач моделирования физических процессов является метод конечных элементов. Метод конечных элементов (МКЭ) является численным методом решения дифференциальных уравнений, встречающихся в физике и технике. По некоторым данным [7] возникновение этого метода связано с решением задач космических исследований в 1950г. Широкое распространение МКЭ и превращение его в общий метод численного решения инженерных задач во многом связано с работами в области МКЭ опубликованными в [12].

Существует распространенное мнение, что МКЭ более «медленный» метод, чем например, метод конечных разностей (МКР). Для большинства литейных макро процессов это утверждение совершенно неверно. При требовании равной адекватности (например, отклонении от точного решения) расчет по МКЭ будет быстрее, чем по МКР в силу того, что исходные постулаты МКЭ точнее соответствуют реальным физическим уравнениям и он «удовлетворится» гораздо более грубой дискретизацией, чем МКР. В некоторых случаях МКР просто не сможет обеспечить такую же достоверность, как МКЭ (см. ниже). Практически сравнивать скорость разных численных методов затруднительно, однако некоторые сравнительные расчеты проведенные при участии авторов данной работы подтвердили существенное «скоростное» преимущество МКЭ (по меньшей мере в разы, а в ряде случаев на порядки). Миф о высокой скорости счета при МКР вероятнее всего основан на следующем. Очень часто с помощью МКР решают задачи при явно неудовлетворительной степени дискретизации из-за ограниченности вычислительных ресурсов. В

этих случаях скорость расчета действительно будет относительно высокой, за счет низкой адекватности. Для тепловой задачи (затвердевание), задачи фильтрационного течения (пористость), деформационных процессов (трещины) МКЭ является вероятно наиболее выгодным методом.

Однако, когда физика задачи требует очень мелкой или динамической дискретности, МКР действительно более выгоден чем МКЭ. Видимо, к таким задачам следует отнести гидродинамические процессы.

Помимо МКЭ и МКР можно упомянуть метод граничных элементов (МГЭ). К литейным процессам этот метод практически не применяется, т.к. не смотря на свои положительные качества, он в основном ориентирован на геометрию с однородными свойствами в пределах достаточно крупных областей. В случае же задачи затвердевания всегда присутствуют области перехода от свойств жидкой фазы к свойствам твердой с динамическими (движущимися) границами.

При оценке или выборе метода следует иметь ввиду, что хотя по большинству объективных показателей МКЭ «сильнее», чем МКР, но по субъективным причинам многие специалисты по моделированию ЛП игнорируют этот факт. Как показала практика, к большинству утверждений о положительных качествах МКР и якобы имеющихся недостатках МКЭ следует относиться с большой осторожностью. Дело в том, что изначально численное моделирование ЛП базировалось на МКР и за этот период достигло определенных успехов. При появлении возможности задействовать МКЭ не все специалисты захотели это сделать, т.к. МКЭ несколько сложнее и требует определенных усилий для освоения. Еще острее эта проблема коснулась коммерческих пакетов, особенно наиболее развитых, которые просто невозможно в короткие сроки переводить с одного метода расчета на другой. Кстати, в этой ситуации оказались не только российские, но и западные специалисты и фирмы. В частности, одна из самых известных в мире коммерческих систем моделирования ЛП MagmaSoft до сих пор в основном базируется на МКР. Неудивительно, что специалисты фирмы-производителя этого пакета на всех семинарах вынуждены доказывать, что МКР не так уж плох и не так уж устарел. На самом же деле практически во всех областях моделирования задач теории поля, кроме гидродинамических, от МКР в основном отказались. К примеру, в настоящее время все(!) наиболее известные коммерческие универсальные системы моделирования физических процессов такие как ANSYS, NASTRAN, PATRAN, COSMOS и др. являются конечно-элементными. Разностные системы моделирования просвещенные «деформаторы», «прочнисты» или «электродинамики» вероятно просто уже не используют и не будут покупать. В этом смысле уровень теоретической подготовки литейщиков видимо гораздо ниже, что и позволяет продавать на литейные предприятия разностные системы моделирования и даже навязывать литейщикам-исследователям совершенно ложные представления о сравнительных характеристиках МКР и МКЭ.

Наиболее наглядное преимущество МКЭ перед разностными методами состоит в более правильном описании геометрии. В рамках МКЭ геометрия обычно задается набором неправильных многогранников, например неправильных тетраэдров. На рис.8 показана конечно-элементная сетка одной четверти отливки «Головка блока цилиндров» в свето-теневом виде (т.н. «шейдинг»). Из этого изображения видно, что конечно-элементная расчетная геометрическая модель (ГМ) позволяет достаточно точно описывать сложную фасонную конфигурацию реальных отливок. Следует подчеркнуть, что на рисунке показана не исходная геометрия, а именно та тетраэдральная конечно-элементная сетка, которая описывает расчетную область отливки в рамках МКЭ. (Аналогично можно было бы показать и расчетную область формы - кокиль и стержни.). Хорошее совпадение поверхности ГМ с поверхностью реальной геометрии позволяет в рамках МКЭ без затруднений правильно учитывать граничные потоки, например, граничную теплопередачу. Граничная теплопередача, как уже отмечалось выше, один из основных параметров, определяющий адекватность решения тепловой задачи применительно к литейным процессам.

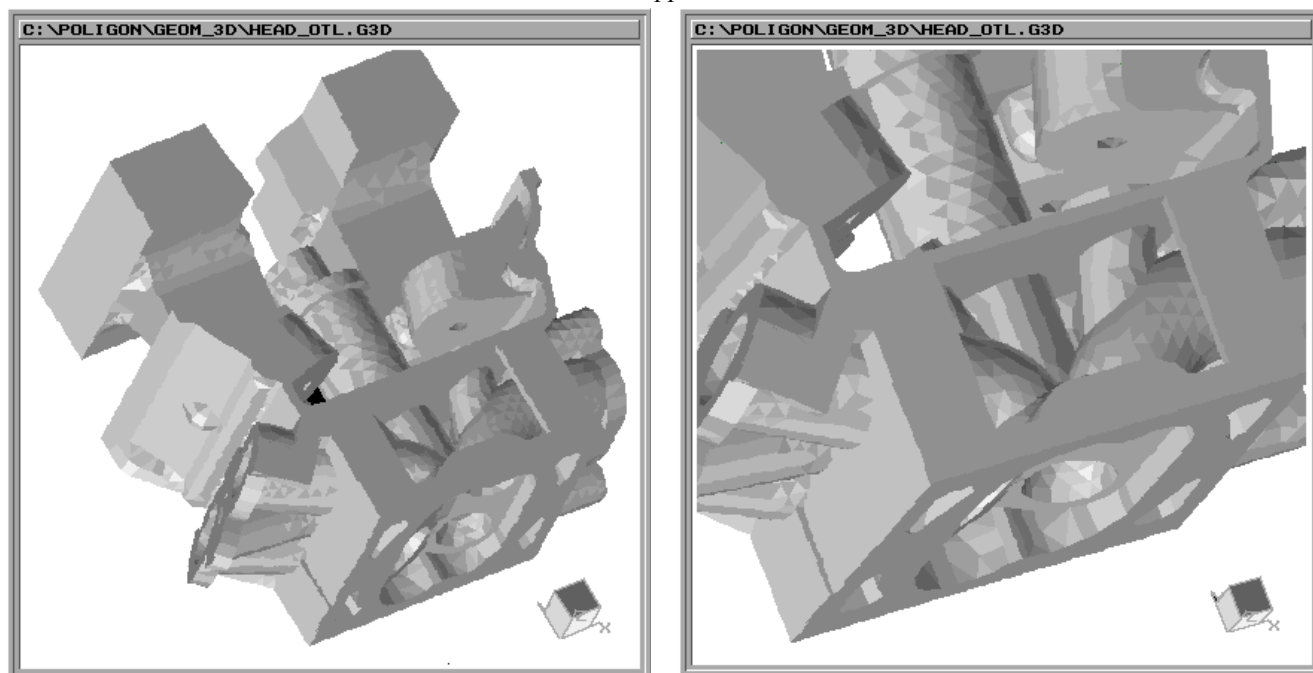


Рис.8

Шейдинг расчетной конечно-элементной сетки четверти отливки «Головка блока цилиндров».

При МКР дискретизация геометрии обычно состоит в представлении ее в виде параллелепипедов с гранями параллельными координатным плоскостям. В таком случае участки поверхности геометрии не могут быть ориентированы произвольным образом и их приходится представлять в ступенчатом виде. На рис.9 показана конечно-разностная сетка четверти отливки «Головка блока цилиндров». Из рисунка видно, что внешняя поверхность отливки при этом существенно искажается, что приводит к неизбежным ошибкам при учете граничной теплопередачи. Кроме того, при МКР чаще всего координаты можно задавать лишь с точностью до дискретности разностной сетки, что приводит к ошибкам в объемных соотношениях геометрии.

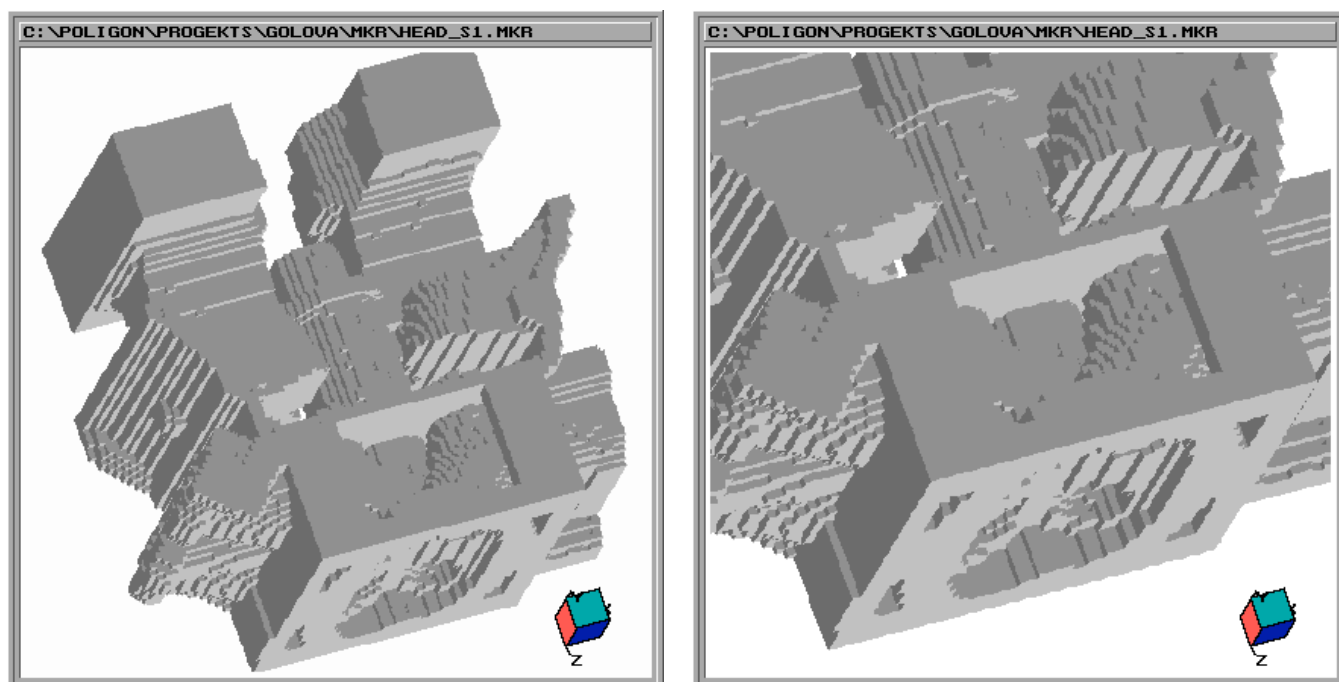


Рис.9

Шейдинг конечно-разностной сетки четверти отливки «Головка блока цилиндров».

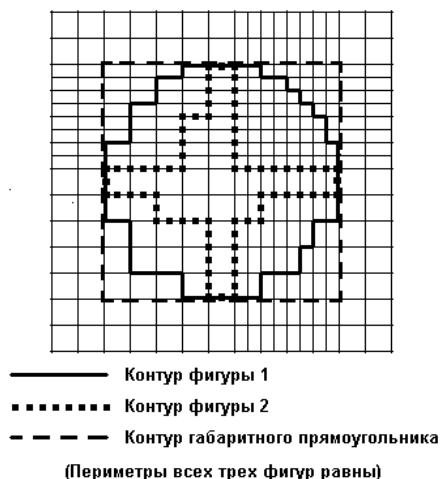


Рис.10

Пример двумерных разностных сеток.

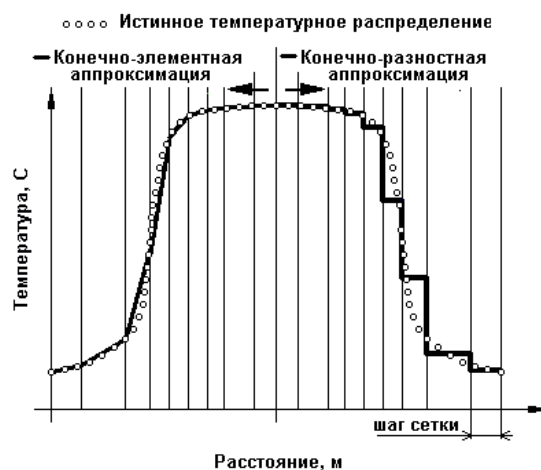


Рис.11

Примеры аппроксимаций температурного распределения для МКЭ и МКР.

В качестве ошибок, к которым приводит разностное описание геометрии, можно привести следующий пример. Для геометрии «без впадин» площадь поверхности в разностном представлении независимо от конфигурации всегда будет равна удвоенной сумме площадей трех взаимно ортогональных проекций на координатные плоскости сетки. Что бы лучше понять о чем идет речь, можно перейти к двумерному случаю (рис.10). Периметр любой фигуры «без впадин» в разностном представлении всегда равен периметру габаритного прямоугольника (рис.10). Это правило будет выполняться независимо от степени измельчения разностной сетки. Очевидно, что в реальности площадь поверхности или периметр совсем другие, а это неизбежно должно привести к ошибкам при решении тепловой задачи. Собственно, широко известная «приведенная толщина», которая определяет время затвердевания и есть отношение объема к теплоотводящей поверхности. Для борьбы с такого рода погрешностями в разностные алгоритмы необходимо включать специальные процедуры, которые бы корректировали граничные потоки. Однако, без восстановления исходных поверхностей в общем виде эта задача не решается. Поэтому чаще всего разработчики разностных алгоритмов как бы «забывают» о том, что теплопередача через любые поверхности непараллельные осям разностной сетки строго говоря В МКР ВСЕГДА УЧИТЫВАЕТСЯ НЕПРАВИЛЬНО. В принципе, одного этого было бы достаточно чтобы безоговорочно отказаться от МКР в пользу МКЭ, т.к. соотношение объема и теплоотводящей поверхности один из главных параметров определяющих процесс затвердевания. Понятно, что в МКЭ увеличение дискретности однозначно улучшает геометрическое соответствие дискретной элементной модели и реальной геометрии отливки, так что этот метод не содержит в своей основе таких геометрических несоответствий, какие заложены в МКР.

Однако, главное преимущество элементного подхода даже не в точности описания геометрии, хотя и это очень важно. В МКЭ на уровне исходных положений при выводе всех уравнений предполагается, что искомая функция (например температура) имеет некоторое распределение внутри элемента, например линейное (рис.11). В МКР же на уровне исходных положений в явном или неявном виде декларируется ступенчатое распределение искомой функции (рис.11), причем размер «ступеньки» равен шагу разностной сетки. Из этого следует два вывода. Во-первых исходные положения МКЭ гораздо лучше соответствуют действительному распределению температурных полей в отливках, чем исходные положения МКР. Во-вторых для адекватного использования МКР, в самой тонкой части отливки должно помещаться не менее десятка узлов разностной сетки. С формальной точки зрения говорить о расчете распределения температур при наличии всего двух-трех «ступенек» - просто бессмысленно.

Кроме того, шаг разностной сетки должен быть таким, чтобы не искажались объемные параметры реальной геометрии. В конечно-элементных сетках все поверхностные узлы сетки могут совпадать непосредственно с реальной поверхностью независимо от густоты сетки. При разностной сетке узлы не могут располагаться произвольно и их положение определяется шагом

разностной сетки. В общем случае ошибка разностной ГМ составляет половину шага сетки в данной области. Понятно, что при грубой разбивке сдвиг поверхности на половину шага может существенно исказить, например, толщину какой-то стенки. При моделировании реальных отливок с помощью МКР перечисленные выше правила чаще всего не могут быть выполнены из-за ограниченности вычислительных ресурсов. Чтобы как-то скомпенсировать недостаточную дискретность разностной сетки, иногда после решения проводят операцию сглаживания ступенчатого температурного распределения. Это позволяет в конечном итоге предъявить гладкие температурные поля с аппроксимацией температур внутри разностного «кирпичика». Математически такая операция достаточно проста и не требует больших ресурсов. Однако, следует помнить, что при МКР непрерывные температурные распределения получены не решением уравнения нестационарной теплопроводности, а последующей обработкой решения, что естественно снижает достоверность результатов.

Из изложенного выше сравнения МКР и МКЭ не следует делать вывод, что МКЭ совершенно идеален, а МКР совершенно непригоден к использованию. В зависимости от конкретной задачи тот или другой метод может быть более или менее выгоден. Однако, применительно к большинству литейных задач МКЭ имеет неоспоримые преимущества перед МКР.

Хотя существует большое разнообразие в формулировках, МКЭ может быть охарактеризован следующими свойствами [7,13]:

- физическая область задачи делится на подобласти (конечные элементы);
- искомое непрерывное распределение (зависимая переменная) аппроксимируется кусочно-непрерывными функциями на каждом конечном элементе. Совокупность таких аппроксимаций считается приближенным описанием искомого распределения. Параметры этих аппроксимаций становятся неизвестными параметрами задачи, определяемые в вершинах (узлах) конечных элементов;
- подстановка аппроксимаций в определяющие уравнения (или эквивалентные им при вариационном подходе) дает систему уравнений с неизвестными узловыми параметрами. Решение системы относительно этих параметров позволяет получить приближенное решение задачи. Теоретически при стремлении размеров элементов к нулю численное решение должно сходиться к точному.

Один из способов решения уравнения нестационарной теплопроводности (1) с граничными условиями - минимизация соответствующего функционала на множестве функций, удовлетворяющих граничным условиям задачи. В рамках вариационного подхода, решение задачи теплопроводности эквивалентно нахождению минимума этого функционала, не имеющего очевидной физической интерпретации. Проводя минимизацию и используя свойства ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО ПОЛИНОМА (аппроксимирующая функция в пределах конечного элемента), можно для каждого конечного элемента записать следующее уравнение [7]:

$$[K]\{T\} + [C]\frac{d\{T\}}{dt} + \{F\} = 0, \quad (5)$$

где $[K]$ - матрица жесткости (теплопроводности); $[C]$ - матрица демпфирования (теплоемкости); $\{F\}$ - вектор-столбец нагрузки (тепловой нагрузки); $\{T\}$ - вектор-столбец искомой функции (функции температуры). (Первоначально МКЭ применялся для прочностных расчетов, поэтому принятые в МКЭ названия типов матриц имеют «деформационный смысл».)

Матрицы в уравнении (5) содержат поверхностные и объемные интегралы. Результаты интегрирования будут зависеть от вида элемента и соответствующего ему интерполяционного полинома. В трехмерной постановке наиболее простым будет решение задачи для случая тетраэдральных симплекс-элементов с четырьмя узлами. В этом случае аппроксимирующей функцией является линейный полином.

Тогда, считая теплопроводность K_n изотропной, можно получить следующие выражения ЛОКАЛЬНЫХ МАТРИЦ, относящиеся к одному конечному элементу [7]:

$$\begin{aligned}
[K] &= \frac{K_n}{26 \cdot V} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{bmatrix} + \frac{\alpha \cdot S_j}{12} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = [K_k] + [K_\alpha], \\
[C] &= \frac{C_v \cdot V}{20} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \\
\{F\} &= \frac{q_n \cdot S_k}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{q_v \cdot V}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\alpha \cdot T_{air} \cdot S_j}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \{F_{qn}\} + \{F_{qv}\} + \{F_\alpha\},
\end{aligned} \tag{6}$$

где A_{ij} - коэффициенты, вычисляемые при известных координатах узлов i, j через соответствующие определители [13]; S_j, S_k - площади теплоотводящих граней напротив узлов с индексами j и k соответственно, которым соответствуют нулевые члены в строках и столбцах матриц и вектор-столбцов; $[K_k], [K_\alpha]$ - кондукционная и конвекционная составляющие матрицы теплопроводности соответственно; $\{F_{qn}\}, \{F_{qv}\}, \{F_\alpha\}$ - поверхностная, объемная и конвекционная составляющие тепловой нагрузки соответственно.

ТЕПЛОЕМКОСТЬ, ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ и другие исходные теплофизические характеристики для каждого конечного элемента ВЫЧИСЛЯЮТСЯ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ НАЧАЛЬНОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ его узлов и могут меняться на каждом расчетном шаге по времени.

Суммируя узловые значения матриц (6) поэлементно, получим уравнение ГЛОБАЛЬНЫХ МАТРИЦ аналогичное (5), но относящееся уже не к отдельному элементу, а к всему ансамблю узлов, связанных в конечные элементы.

Не следует думать, что исходные свойства, приписываемые относительно крупным элементам, характерным для МКЭ, неадекватно отражают действительный характер распределения исходных свойств по пространству отливки. При операции поэлементного суммирования узловых значений СВОЙСТВА ОБЛАСТИ ВОКРУГ УЗЛА АВТОМАТИЧЕСКИ УЧИТЫВАЮТСЯ КАК СРЕДНЕИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПО ОБЪЕМУ, зависящие от свойств всех конечных элементов, окружающих узел. Что же касается искомой функции, то она является функцией координат в рамках каждого конечного элемента.

Для решения дифференциального уравнения (5) можно приближенно аппроксимировать зависимость $\{T\}$ от времени на участке от $\{T_1\}$ до $\{T_2\}$ линейной функцией. Тогда можно выразить $d\{T\}/dt$ и $\{T\}$ через значения $\{T_1\}$ и $\{T_2\}$ соответствующие моментам времени t_1 и t_2 . Подставляя $d\{T\}/dt$ и $\{T\}$, можно получить уравнение, являющееся разрешающим, если принять во внимание, что $\{T_1\}$ известно как начальное условие для каждого временного шага:

$$(w \cdot [K] + [C]/\Delta t) \cdot \{T_2\} = ((w-1) \cdot [K] + [C]/\Delta t) \cdot \{T_1\} - \{F\}, \tag{7}$$

где $\Delta t = t_2 - t_1$ - временной интервал от t_1 до t_2 ; $w = (t - t_1)/\Delta t$ - весовой коэффициент, изменяющийся от 0 до 1 и характеризующий относительное положение момента времени t которому соответствует значение $\{T\}$.

Такая формулировка в настоящее время наиболее популярна. В отличие от подходов показанных, например в [7], использование весового коэффициента позволяет получить общее уравнение, включающее в себя все обычно используемые типовые разностные временные схемы:

- $w=1$ - неявная разностная схема,
- $w=2/3$ - разностная схема Галеркина,
- $w=1/2$ - центрально-разностная схема Крэнка-Николсона,
- $w=0$ - явная разностная схема.

Существует распространенное мнение, что для решения задачи нестационарной теплопроводности по явной схеме требуются существенно меньшие временные затраты, чем, например, по неявной. По отношению к МКЭ это не так, что особенно очевидно, если формулировать разрешающее уравнение не относительно $\{T_2\}$, как это обычно принято, а относительно приращения $\{\Delta T\} = \{T_2\} - \{T_1\}$:

$$(w*[K] + [C]/\Delta t)*\{\Delta T\} = -[K]*\{T_1\} - \{F\}. \quad (8)$$

Эта формулировка позволяет несколько эффективнее экономить машинные ресурсы. Из уравнения (8) видно, что при явной схеме ($w=0$) по сравнению с неявной ($w=1$) избегается только операция суммирования матриц $[K]$ и $[C]$. По отношению к времени самого решения системы уравнений, это вряд ли может существенно повлиять на общее время расчета. Более того, ПРИ НЕЯВНОЙ СХЕМЕ ПРЯМЫЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ РАБОТАЮТ НАИБОЛЕЕ УСТОЙЧИВО, что позволяет в рамках МКЭ рекомендовать именно ее.

Для возможности увеличения расчетного шага по времени можно увеличить степень функции в предполагаемом уравнении зависимости $\{T\}$ от t . В этом случае необходимо задействовать ТРЕХСЛОЙНУЮ ВРЕМЕННУЮ СХЕМУ. По этой схеме запоминаются температурные поля не одного, а двух предыдущих временных слоев. (С точки зрения экономии памяти это весьма небольшие потери по сравнению с объемом требующимся на глобальную матрицу коэффициентов.) Зависимость температуры $\{T\}$ от времени t можно представить в виде неполного полинома степени n (при $n=2$ полином превращается в полный):

$$\{T\} = \{A\}*t^n + \{B\}*t + \{T_1\}, \quad (9)$$

где $\{A\}, \{B\}$ - коэффициенты полинома для каждого узла; $\{T_1\}$ - температура узлов в начале текущего шага (момент времени условно принятый за ноль).

Дифференцируя по времени и проводя соответствующие подстановки в (9) можно получить выражения для $d\{T\}/dt$ и $\{T\}$ в уравнении (5). Произвольный выбор весового коэффициента w , как это делается обычно, с формальной точки зрения не совсем корректен. На самом деле более правильным будет найти такую точку, которая бы отражала характер зависимости T от t по всему текущему шагу. Исходя из этого интегрируем найденные выражения по w от 0 до 1 и получаем значения коэффициентов для средних за текущий шаг значений $d\{T\}/dt$ и $\{T\}$:

$$\begin{aligned} wk1 &= (1/(n+1) + 0.5*k^{n-1}) / (1 + k^{n-1}); \\ wk2 &= (1/(n+1) + 0.5) / (k + k^n), \end{aligned} \quad (10)$$

где $k = \Delta t_o / \Delta t$ - отношение предыдущего временного шага Δt_o к текущему шагу Δt ; $wk1, wk2$ - коэффициенты, характеризующие соотношения между относительной длительностью предыдущего шага k и степенью полинома n .

Подставляя соответствующие выражения в (5) получаем разрешающее уравнение:

$$(wk1*[K] + [C]/\Delta t)*\{\Delta T\} = -[K]*(\{T_1\} + wk2*\{\Delta T_o\}) - \{F\}, \quad (11)$$

где $\{\Delta T_o\} = \{T_o\} - \{T_1\}$ - разница между температурой $\{T_o\}$ в начале предыдущего шага и температурой $\{T_1\}$ в начале текущего шага.

По смыслу (11) аналогично (8), но оно сформулировано уже С УЧЕТОМ НЕЛИНЕЙНОГО ХАРАКТЕРА ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУР ВО ВРЕМЕНИ. Это позволяет в некоторых случаях ПОВЫСИТЬ УСТОЙЧИВОСТЬ РЕЗУЛЬТАТОВ К УВЕЛИЧЕНИЮ ШАГА по времени.

После операций умножения и сложения разрешающие уравнения типа (7), (8), (11) можно привести к обычному виду системы алгебраических уравнений:

$$[Mk] * \{\Delta T\} = \{R\}, \quad (12)$$

где $[Mk]$ - матрица известных коэффициентов; $\{R\}$ - вектор-столбец известных правых частей уравнений; $\{\Delta T\}$ - вектор-столбец искомых величин.

Существуют различные прямые и итерационные методы решения систем типа (12) [7,13,14]. Несколько более подробно обсудим вопрос о выборе метода решения таких систем ниже, после того как до конца рассмотрим алгоритмы решения тепловой задачи.

Исходное уравнение нестационарной теплопроводности содержит два члена, которые формально можно использовать для учета теплопередачи между отливкой и формой - задаваемый граничный тепловой поток и конвективную теплопередачу в среду.

Однако, тепловой поток никак не учитывает изменения температур сопрягаемых поверхностей отливки и формы во время шага по времени. Поэтому использование задаваемого ТЕПЛООВОГО ПОТОКА возможно только ПРИ МАЛЫХ СКОРОСТЯХ ОХЛАЖДЕНИЯ И НЕБОЛЬШИХ НАЧАЛЬНЫХ ПЕРЕПАДАХ температур между отливкой и формой. В большинстве способов литья ПЕРЕПАДЫ И СКОРОСТИ ИЗМЕНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ТЕМПЕРАТУР В НАЧАЛЬНЫЕ МОМЕНТЫ ВРЕМЕНИ ОЧЕНЬ ВЕЛИКИ. Таким образом, ввод теплообмена между отливкой и формой посредством задаваемого теплового потока при моделировании литейных процессов неприменим.

При конвективной теплопередаче в среду результирующий теплообмен зависит от поверхностной температуры тела, изменение которой (в том числе и в зависимости от интенсивности теплообмена) учтено в исходном уравнении. Таким образом, ввод теплопередачи между отливкой и формой в численное решение через УСЛОВИЯ КОНВЕКТИВНОЙ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ В СРЕДУ позволяют УЧЕСТЬ БЫСТРЫЕ ИЗМЕНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТНОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ. При реализации этого подхода отливка и форма дискретизируются отдельными сетками с совпадающими границами сопряженных элементов отливки и формы. Каждая из этих сеток считается независимой расчетной областью. Взаимосвязь между ними решается в рамках конвективных граничных условий с эффективным коэффициентом теплопередачи β и известными температурами узлов противоположной поверхности в начале шага по времени. В дальнейшем будем считать отливку текущей расчетной областью, а форму внешней областью, имеющей с отливкой общие границы. Тогда для границ типа «отливка-форма» локальные матрицы (6) можно дополнить контактными составляющими теплопроводности и тепловой нагрузки:

$$\begin{aligned} [K] &= [Kk] + [K\alpha] + [K\beta], \\ \{F\} &= \{Fqn\} + \{Fqv\} + \{F\alpha\} + \{F\beta\}, \\ [K\beta] &= \frac{\beta * Si}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \{F\beta\} = -\frac{\beta * Si}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ Tm(j) \\ Tm(k) \\ Tm(m) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (13)$$

где Si - площадь сопряженной грани напротив узла с индексом i , которому соответствуют нулевые члены в строках и столбцах матриц и вектор-столбцов; $Tm(j), Tm(k), Tm(m)$ - температуры сопряженных узлов формы, совпадающие с узлами отливки j, k, m соответственно; $[K\beta]$ - контактная составляющая матрицы теплопроводности; $\{F\beta\}$ - контактная составляющая тепловой нагрузки.

Величина коэффициента теплопередачи может рассчитываться на каждом временном шаге для каждой пары сопрягаемых поверхностей в зависимости от температуры, площади контакта и т.п. Для более адекватного учета быстрой скорости изменения поверхностных температур в начальный период имеет смысл делать НАЧАЛЬНЫЕ ВРЕМЕННЫЕ ШАГИ БОЛЕЕ МЕЛКИМИ, чем в последующий период расчета.

Следует отметить, что недостатком граничного условия теплопередачи в среду является отсутствие учета изменения температуры противоположной поверхности. Для возможности учета изменения за временной шаг температуры противоположной поверхности можно задействовать рассмотренную выше ТРЕХСЛОЙНУЮ СХЕМУ. В этом случае появляется возможность использовать МОДЕЛЬ ДЛЯ ПРОГНОЗА ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУР УЗЛОВ ПРОТИВОПОЛОЖНОЙ ПОВЕРХНОСТИ:

$$\begin{aligned} T_N &= T_{m1} + 0.8 * (T_{m1} - T_{m0}); \\ T_S &= 0.5 * (T_{c1} + T_{m1}); \\ T_{m2} &= \begin{cases} 0.5 * (T_{m1} + T_N) & (T_N < T_S, T_{m1} < T_{c1}) \text{ или } (T_N > T_S, T_{m1} > T_{c1}); \\ 0.5 * (T_{m1} + T_S) & \text{при } (T_N > T_S, T_{m1} < T_{c1}) \text{ или } (T_N < T_S, T_{m1} > T_{c1}), \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

где T_{m2} - прогнозируемая средняя за текущий временной шаг температура узла формы; T_{m1} - температура узла формы в начале текущего шага; T_{m0} - температура узла формы в начале предыдущего шага; T_{c1} - температура узла отливки в начале текущего временного шага; T_S - прогнозируемая эффективная температура к которой стремятся оба граничных (совпадающих) узла сопрягаемых поверхностей; T_N - прогнозируемая температура узла формы в конце текущего шага.

Еще один путь повышения адекватности учета теплопередачи через границы сопряжения заключается в организации ВВОДА УЗЛОВ ПРОТИВОПОЛОЖНОГО СОПРЯГАЕМОГО КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА В ГЛОБАЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ расчетной области. Это позволяет помимо температуры противоположной поверхности УЧЕСТЬ ГРАДИЕНТ ТЕМПЕРАТУР противоположной расчетной области. Записывая локальные матрицы для сопряженных конечных элементов из разных расчетных областей, можно заметить, что известные температуры противоположных узлов являются искомыми температурами для области «по другую сторону границы». Суммируя строки матриц относящиеся к сопряженным узлам обеих расчетных областей и пренебрегая теплоемкостью противоположных элементов, контактные составляющие можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} [K\beta] &= \frac{\beta * S_i}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \frac{\beta * S_i}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \{F\beta\} &= -\frac{\beta * S_i}{3} \begin{Bmatrix} 0 \\ T_{m(j)} \\ T_{m(k)} \\ T_{m(m)} \end{Bmatrix} + \left(\frac{K_m}{26 * V_m} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_{12} & M_{22} & M_{32} & M_{42} \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} & M_{43} \\ M_{14} & M_{24} & M_{34} & M_{44} \end{bmatrix} + \frac{\beta * S_i}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} T_{m(i)} \\ T_{m(j)} \\ T_{m(k)} \\ T_{m(m)} \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (15)$$

где $T_{m(i)}$ - температура узла элемента формы не лежащего на сопрягаемой грани; K_m - теплопроводность формы; V_m - объем элемента формы; M_{ij} - коэффициенты характеризующие элемент формы, рассчитываемые аналогично A_{ij} в формуле (6);

Поскольку уравнение нестационарной теплопроводности в своей классической формулировке не содержит членов описывающих выделение скрытой теплоты, то для адекватного расчета затвердевания важно правильно выбрать способ ее учета. В уравнении нестационарной теплопроводности присутствует член, задающий мощность внутренних источников тепла. Для учета выделения скрытой теплоты его использовать нерационально, т.к. зависимость тепловыделения

от времени неизвестна. Вероятно, способ учета тепловыделения с помощью ЭФФЕКТИВНОГО ВНУТРЕННЕГО ИСТОЧНИКА является наименее адекватным и может быть применен только к случаю ОЧЕНЬ МАЛЫХ СКОРОСТЕЙ ОХЛАЖДЕНИЯ и ОЧЕНЬ БОЛЬШИХ ИНТЕРВАЛОВ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ при равномерном темпе выделения твердой фазы. Такой случай в реальной ПРАКТИКЕ ЛИТЬЯ ПРАКТИЧЕСКИ НЕ ВСТРЕЧАЕТСЯ.

Чаще всего для учета скрытой теплоты используют метод ЭФФЕКТИВНОЙ ТЕПЛОЕМКОСТИ [15]. В этом случае материалу сплава приписывают переменную теплоемкость с учетом внутреннего теплосодержания. Такой способ не позволяет адекватно учесть тепловыделения при постоянной температуре, т.к. теплоемкость не может быть бесконечно большой. Кроме того, при наличии слишком маленьких температурных интервалах в спектре затвердевания при сравнительно больших величинах тепловыделения, этот метод делает вычислительный процесс неустойчивым. Таким образом, этот метод применим для сплавов со сравнительно БОЛЬШИМ ИНТЕРВАЛОМ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ при ОТСУТСТВИИ ЭВТЕКТИЧЕСКИХ ПЛОЩАДОК и ОТСУТСТВИИ СТОЯНИЯ НА ЛИКВИДУСЕ. К этому случаю можно отнести затвердевание ШИРОКОИНТЕРВАЛЬНЫХ СПЛАВОВ ТИПА ТВЕРДОГО РАСТВОРА при НЕБОЛЬШИХ СКОРОСТЯХ ОХЛАЖДЕНИЯ. Эти условия охватывают сравнительно узкую область литья. При применении этого метода для широкого класса сплавов и процессов используют искусственно задаваемые температурные интервалы при наличии площадок. Это, естественно, снижает адекватность моделирования. Широкое распространение этого метода можно объяснить только простотой его реализации для разработчика.

Вероятно, наиболее адекватным способом учета скрытой теплоты являются различные модификации ЭНТАЛЬПИЙНОГО [15] учета тепловыделения. Энтальпийные методы позволяют рассчитывать затвердевание для ШИРОКОГО КЛАССА СПЛАВОВ И СПОСОБОВ ЛИТЬЯ. К наиболее легко реализуемым, устойчивым и скоростным модификациям этого метода можно отнести метод ЭФФЕКТИВНОГО ПОДЪЕМА ТЕМПЕРАТУР В СООТВЕТСТВИИ С ЭНТАЛЬПИЕЙ [15]. При этом методе решение проходит в два этапа. На первом этапе рассчитываются энтальпии для каждого узла. Это дает возможность определить новое значение доли твердой фазы. На втором этапе по рассчитанным изменениям доли твердого вычисляются новые температуры с учетом тепловыделения.

Полагая для простоты теплоемкость сплава C_p постоянной на некотором температурном интервале ΔT , можно записать:

$$\Delta H = C_p \cdot \Delta T - L \cdot \Delta P_s, \quad (16)$$

где ΔH - изменение энтальпии при изменении температуры ΔT и соответствующем изменении доли твердой фазы ΔP_s .

Учитывая (16) для полностью твердого и полностью жидкого состояния при некоторых допущениях разрешающее уравнение (8) можно записать относительно энтальпии:

$$(w \cdot [K] + [C]/\Delta t) \cdot \{\Delta H\} = -[K] \cdot \{H_1\} - \{F \cdot C_p\}, \quad (17)$$

где H_1 - энтальпия в начале текущего шага по времени.

Учитывая уравнения связи температуры и доли твердой фазы (2) можно определить кусочно-непрерывную зависимость доли твердого от энтальпии: $P_s = F(H)$. Тогда изменение температуры с учетом тепловыделения при затвердевании определится следующим образом:

$$\Delta T = (\Delta H + L \cdot (F(H_1 + \Delta H) - P_{s1})) / C_p, \quad (18)$$

где H_1, P_{s1} - известные значения энтальпии и доли твердого в начале текущего шага по времени.

На самом деле зависимость типа $P_s = F(H)$ можно использовать еще на стадии формирования разрешающего уравнения относительно энтальпии (17). Это позволяет увеличить устойчивость результатов к увеличению временного шага, однако и в этом случае операция (18) необходима, т.к. позволяет точно перевести изменение теплосодержания в температуру. Анализ уравнений (17) и (18) показывает, что скрытая теплота будет полностью учтена даже в том случае, если

интервал затвердевания окажется внутри температурного (энтальпийного) приращения ΔT (ΔH). Этот метод позволяет одинаково эффективно учитывать и широко-интервальные тепловыделения и тепловыделения при постоянных температурах.

В данной статье не был подробно рассмотрен ТЕПЛООБМЕН ЛУЧЕИСПУСКАНИЕМ МЕЖДУ НЕСОПРЯЖЕННЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ. Главная особенность такого теплообмена заключается в том, что он существенно зависит от взаимных углов наклона поверхностей (внешних граней элементов) и, кроме того, требует полной трассировки лучей между гранями по принципу «каждый с каждым» с определением помимо углов, также и взаимного экранирования поверхностей. В остальном задача учета теплообмена лучеиспусканием аналогична рассмотренной выше задаче теплопередачи между сопряженными поверхностями. Основные особенности адекватного решения при лучистой теплопередаче связаны с необходимостью проведения большего количества вычислений геометрического характера на каждом расчетном шаге по времени, если предполагается движение одних частей относительно других. Это необходимо при расчетах литейных технологий с применением вакуумных печей, где такое перемещение и обеспечивает направленность затвердевания и требуемую структуру ответственных деталей из жаропрочных сплавов, например турбинных лопаток или деталей ракетных двигателей. Задача учета лучистой теплопередачи также эффективно решается в рамках МКЭ. Необходимость учета углов наклона делает метод конечных разностей (МКР) в данном случае принципиально непригодным. (Хотя, как уже указывалось выше, это не мешает ряду производителей систем моделирования ЛП предлагать разностные системы и для моделирования процессов лучистой теплопередачи, пользуясь невысоким уровнем теоретической подготовки литейщиков.)

Также не были рассмотрены некоторые другие специфические процессы, связанные с тепловой задачей, которые иногда используют в различных способах литья для достижения тех или иных условий формирования отливки. В качестве примера можно упомянуть совместное протекание электрических и тепловых процессов, которое также в последнее время применяют для обеспечения направленности затвердевания. В общем виде можно сказать, что решение подобных задач, а в частности задачи распределения электрических потенциалов и дополнительных тепловыделений за счет термозависимого электросопротивления затвердевающего металла, основано на тех же принципах, которые были рассмотрены при обсуждении тепловой задачи. Подобные процессы чаще всего описываются эллиптическими дифференциальными уравнениями, как и уравнение нестационарной теплопроводности и могут решаться на основе те же алгоритмов. Соответственно, совместное решение подобных задач с задачей затвердевания почти всегда может быть реализовано достаточно эффективно и адекватно. Более того, имеющаяся в системе «Полигон» возможность проведения совместного решения электрической и тепловой задачи позволяет уже сегодня отрабатывать различные параметры подобных технологий для деталей специального назначения например на заводе «Рыбинские Моторы» [17]

Как указывалось выше, получение численного решения на каждом шаге по времени связано с нахождением корней системы уравнений типа (12). Подобные системы решают различными прямыми и итерационными методами [7,13,14]. При решении прямыми методами необходимо использовать то, что МАТРИЦА КОЭФФИЦИЕНТОВ ИМЕЕТ РАЗРЯЖЕННУЮ И СИММЕТРИЧНУЮ СТРУКТУРУ, в противном случае время решения и требуемые вычислительные ресурсы станут неприемлемыми. В литературе приводятся тексты программ на разных языках программирования (достаточно простые для воспроизведения даже студентами), позволяющие проводить подобные решения [7,14]. Для относительно небольших матриц (т.е. систем уравнений) до 500-1000 узлов (что соответствует примерно 2000-4000 трехмерным четырехузловым симплекс-элементам) можно рекомендовать прямые методы, как наиболее точные и скоростные для небольших матриц. Как показала практика моделирования с применением «Полигона» на таких размерностях прямые методы при эффективной работе блока оптимизации нумерации (использование свойства разреженности матриц) работают несколько быстрее итерационных (на 5-10%) и гарантируют точность решения, а итерационное решение всегда несколько отличается от точного. Следует отметить, что требования по памяти у прямых методов и на малых размерностях более высокие, чем у итерационных - примерно в 2-4 раза. Хотя, видимо, при современных ресурсах персональных компьютеров с 128-512 Мб оперативной памяти, лишние 10-20 Мб, которые нужны для маленьких матриц вряд ли имеют значение.

Однако, ситуация коренным образом меняется для матриц большой размерности, характерной для трехмерных сеток реальных фасонных отливок. Для достаточно адекватного трехмерного описания реальной фасонной отливки типа блока цилиндров требуется не менее 100000-200000 элементов только в отливке, не считая элементов в форме. Современные возможности компьютеров на этапе построения сетки позволяют легко оперировать с сетками размером 100000-500000 узлов и соответственно до 2-5 миллиона элементов (чаще всего рост количества элементов зависит от количества узлов не линейно). Чтобы представить какие вычислительные ресурсы требуют геометрические модели такой размерности при использовании разных методов можно привести следующие цифры. Сетка примерно в 25000 узлов (в отливке и форме) и около 125000 элементов для решения прямым методом требует около 120 Мб оперативной памяти и примерно сутки на расчет при частоте процессора 250 МГц. (Данные 3-4 летней давности, т.к. в настоящее время прямой метод используется крайне редко.) В то же время эта же сетка при расчете итерационным методом требует около 15 Мб оперативной памяти и около 2 часов на расчет. (На современных компьютерах с частотой 800-1000 МГц около 10-15 минут.) При этом отклонения итерационного решения от точного (прямым методом) будут не более градуса на всех шагах по времени. Таким образом, ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД НА МАТРИЦАХ БОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ ТРЕБУЕТ ГОРАЗДО МЕНЬШЕ ПАМЯТИ И СУЩЕСТВЕННО УВЕЛИЧИВАЕТ СКОРОСТЬ РАСЧЕТА. Собственно, это и дает возможность в 3D-постановке моделировать реальные технологии на персональных компьютерах. Требования по памяти делают прямой метод для этого практически неприменимым. Такое неожиданное сравнительное поведение прямого и итерационного метода при увеличении размерности матрицы обусловлено особенностями оптимизации разреженных матриц, требующейся при прямом методе. При оптимизации нумерации узлов (уменьшение ширины ленточной матрицы) эта оптимизация тем менее эффективна, чем больше количество узлов в сетке и чем более сложна топология сетки (геометрического объекта). Например, в рассмотренном выше примере с сеткой в 25000 узлов, максимальное количество узлов связанных в единую «звезду узлов» (элементы сходящиеся в одном узле) не превышает 100-150. Это и есть идеальная (в общем случае недостижимая) минимальная ширина матрицы. А в реальности после оптимизации ширина матрицы составляет для этой сетки около 1000. Итерационный же метод не требует оптимизации нумерации в сетке и на каждом шаге итерационного процесса использует реальную имеющуюся «звезду узлов» для каждого узла не в зависимости от глобальной нумерации узлов сетки. Т.е. итерационный метод решал эту же задачу с условной эффективной шириной матрицы 100-150, а прямой метод с шириной около 1000. Это и дает прирост скорости и уменьшение необходимой памяти примерно на порядок.

При модификации трехмерных решателей системы моделирования ЛП «Полигон», замена прямого метода на итерационный позволила в 12-14 раз увеличить скорость решения тепловой задачи и во столько же раз сократить требования по памяти. При этом максимальные отличия прямого решения от итерационного в температурном эквиваленте (само решение энтальпийное) обычно не превышают 0.5-1 градуса на любом шаге по времени. Надо иметь в виду, что все вышесказанное о преимуществах итерационного метода (особенно в отношении небольших погрешностей) справедливо только для хорошо обусловленных матриц большой размерности, которые характерны для трехмерной тепловой задачи в МКЭ.

Следует отметить, что при решении усадочно-фильтрационной задачи применение итерационных методов требует определенной осторожности и специальных мероприятий при назначении исходного распределения на нулевой итерации так, чтобы оно не слишком сильно отличалось от окончательного решения. В противном случае наблюдаются существенные отклонения от точного решения, особенно на первых шагах по времени. То же самое справедливо и для задачи распределения электрических потенциалов в затвердевающей отливке, особенно, когда граничные условия задаются не по напряжению, а по току.

Итак, выше были рассмотрены некоторые общие вопросы компьютерного моделирования ЛП и физико-математические модели при решении тепловой задачи в литейной постановке. Теперь рассмотрим усадочную задачу, которая, хотя и напрямую зависит от теплового решения, но по важности занимает пожалуй первое место для заводского технолога.

В настоящее время, к сожалению, приходится констатировать, что в большинстве моделирующих систем усадочная задача решается на основе крайне упрощенных моделей, которые

не соответствуют современным возможностям численного моделирования. Практически можно считать, что ни в одной системе моделирования ЛП, кроме системы «Полигон», усадочная задача не решается на основе современных физических моделей. Чаще всего под расчетом усадочных дефектов в таких системах подразумевают обработку тепловых полей по относительно простым критериям типа критерия Наямы или, в лучшем случае, проводят упрощенный расчет макропористости или раковин без учета фильтрационных процессов и сложной структурированности двухфазной зоны. Таким образом, основной вид литейных дефектов (микро- и макропористость, раковины) большинство современных литейных систем не моделируют. Кроме того, при анализе моделирующих систем большинство авторов сравнительных обзоров даже не упоминают об отсутствии в них адекватного численного моделирования усадочных процессов, предпочитая упомянуть о “тепловом расчете с учетом усадки”, не раскрывая отсутствие моделирования фильтрационно-усадочных процессов при затвердевании. В связи с этим, обсуждение принципов моделирования усадочных процессов представляется необходимым.

Механизм образования пористости в различных сплавах может принципиально различаться. Для сплавов с ярко выраженными процессами объемного расширения, образование пористости чаще всего связано с совместным протеканием процессов ЗАТВЕРДЕВАНИЯ, КРИСТАЛЛИЗАЦИИ И ДЕФОРМАЦИИ. К таким сплавам относятся например некоторые виды СЕРЫХ ЧУГУНОВ. Это достаточно специфические процессы и их следует рассматривать отдельно. В данной статье под усадочной задачей (или задачей питания) подразумевается расчет образования пористости и раковин в сплавах с существенным значением ОБЪЕМНОЙ УСАДКИ ПРИ ЗАТВЕРДЕВАНИИ и несущественном влиянии деформационных процессов. К таким сплавам относится подавляющее БОЛЬШИНСТВО ЛИТЕЙНЫХ СПЛАВОВ: стали, некоторые виды чугунов, алюминиевые и магниевые сплавы, бронзы, латуни и т.д.

Для таких сплавов образование пористости будет зависеть от объемной усадки в каждой точке в каждый момент времени. Коэффициент усадки может быть различен для разных фаз, выделяющихся при затвердевании, например α -твердый раствор и эвтектика. Для учета этого может быть использована функция $K_u(P_s)$ зависимости коэффициента реализации полной усадки K_u от доли твердой фазы P_s . На практике удобно задавать эту функцию в виде СПЕКТРА РЕАЛИЗАЦИИ УСАДКИ. Тогда относительная объемная усадка V_u (в долях единицы) может быть выражена следующим образом:

$$i = 1..n;$$

$$P_s(i) = P_s(1), P_s(2), \dots P_s(n); \quad P_s(1) = 0; P_s(1) \leq P_s(i+1); P_s(n) = 1;$$

$$T(i) = T(1), T(2), \dots T(n); \quad T(1) = T_{liq}; T(i) \geq T(i+1); T(n) = T_{sol}; \quad (19)$$

$$T(P_s) = F(i, i+1) \quad \text{при} \quad P_s(i) < P_s < P_s(i+1);$$

$$Q(P_s) = L * P_s,$$

где β – коэффициент суммарной объемной усадки при затвердевании; α – коэффициент объемной термической усадки в жидком состоянии; T_0 и T – температура в начальный и текущий моменты времени соответственно; T_{liq} – температура ликвидуса; i, n – номер точки и количество точек в спектре усадки соответственно; $K_u(i), P_s(i)$ – коэффициент реализации усадки и доля твердой фазы в точке i соответственно.

При моделировании питания отливки необходимо учитывать как минимум ДВА РАЗЛИЧНЫХ МЕХАНИЗМА образования усадочных дефектов. По одному из этих механизмов образуется МАКРОПОРИСТОСТЬ И РАКОВИНЫ, по второму МИКРОПОРИСТОСТЬ [6]. В данном случае эти виды пористости разделены не по величине пористости, а по механизму образования, который в свою очередь и определяет предельный уровень пористости. Например, макропористость не может быть много больше величины объемной усадки при затвердевании, которая обычно составляет 3-5%, а макропористость может достигать величин 10-30% и в пределе образует концентрированную раковину (100% пористости). Дадим общую характеристику этих двух механизмов, а затем рассмотрим принципы моделирования каждого из них более подробно.

Макропористость образуется при не- достатке питания (отсутствия необходимого объема для компенсации усадки) выше зеркала расплава или его условного эквивалента в двухфазной зоне. (Поскольку объединение условного зеркала в двухфазной зоне и реального зеркала жидкой зоны геометрически может представлять из себя единую поверхность, в дальнейшем это объединение будем называть просто «зеркалом».) Таким образом, для расчета макропористости необходимо решать ЗАДАЧУ ВОЗНИКНОВЕНИЯ И ДВИЖЕНИЯ ЗЕРКАЛ РАСПЛАВА. Перемещение зеркал обусловлено объемной усадкой, а их возникновение происходит из-за формирования при затвердевании изолированных друг от друга объемов, а также из-за возникающей изоляции от внешней «подпитки» для специальных способов литья типа ЛНД. По сути дела область формирования макропористости - это суммарный объем, который занимают все зеркала в процессе своего движения. Сами законы движения и возникновения зеркал рассмотрим ниже. В зависимости от доли жидкого и «структурированности» той области, которая оказалась выше зеркала, пористость там образуется либо по принципу «вытекания» жидкого, либо по принципу усадки при полном отсутствии компенсации. В тех областях, где происходит «вытекание», пористости может достигать значительных величин вплоть до 100% - т.е. образовывать раковину. Такая модель является классической для образования раковины [18-20]. В описанной выше модификации она лишь более подробно рассматривает двухфазную область, предполагая что между жидкой и твердой фазой есть некоторые промежуточные состояния в которых поведение металла зависит от степени его «структурированности», что и позволяет применить ее для образования рыхлот (макропористости).

Микропористость образуется при недостатке давления ниже зеркала (т.е. в области потенциально достаточного питания). Падение давления в глубине зоны с формально хорошими условиями питания происходит из-за действия следующих факторов: суммарной объемной усадки, фильтрационным (затрудненным) характером движения жидкой части металла в двухфазной зоне, изоляции от внешнего давления при формировании твердой фазы на границах приложения давления. (Внешнее давление - атмосферное для обычных способов литья и повышенное или пониженное для специальных.) Наиболее адекватное описание распределения давления, видимо даст решение дифференциального УРАВНЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИОННОГО ТЕЧЕНИЯ [7] (не путать с законом Дарси). Более подробно принципы вычисления поля давлений рассмотрим ниже. При падении давления ниже некоторого критического значения P_0 , возникают условия для появления поверхности раздела и формирования «зародыша» микропоры, который далее будет расти в соответствии с объемной усадкой. Очевидно, что окончательный объем микропоры будет равен объемной усадке оставшейся жидкой части, т.е. пористость формируется по принципу усадки при полном отсутствии компенсации. Величина такой пористости не может быть больше величины суммарной объемной усадки. Под критическим давлением P_0 можно подразумевать разные величины. С одной стороны можно считать, что это парциальное давление растворенных газов. Тогда, при падении давления ниже P_0 , газ выделяется в виде газового пузырька - это будет соответствовать например водородной пористости в алюминиевых сплавах. С другой стороны, можно считать, что критическое давление - это эффективная прочность жидкого расплава на разрыв. Тогда образование пористости формально не будет связано с газовыделением и вопрос о том, что в порах - вакуум или газ, остается открытым. Таким образом, описанная модель образования микропористости фактически является универсальной и может одинаково успешно использоваться при разных представлениях о потенциальных причинах формирования микропористости. Эта модель в определенной степени так же может считаться классической [21-24]. Различия в ее изложении у разных авторов заключаются в том, насколько адекватные решения предлагаются для определения поля давлений и какой параметр выбирают в качестве критической величины. Одним из первых авторов реализовавших эти представления в программном виде на базе решения уравнения фильтрационного течения с помощью МКЭ (т.е. с достаточной адекватностью) является И.Л.Койнов [24].

В общем случае ЗАДАЧИ ПО МИКРО- И МАКРОПОРИСТОСТИ СЛЕДУЕТ РЕШАТЬ СОВМЕСТНО, т.к. они могут взаимно влиять друг на друга. Например, перемещение зеркала расплава, вычисляемое в задаче по макропористости, влияет на распределение давления. В свою очередь распределение давления, являющееся решением усадочно-фильтрационной задачи для микропористости, определяет изолированность зон питания и образование новых зеркал. Кроме

того, очевидно, что процесс образования раковин может влиять на тепловую задачу. Хотя во многих случаях возможны достаточно адекватные решения и без учета этого влияния, однако на современном уровне развития моделирования **СОВМЕСТНОЕ РЕШЕНИЕ ТЕПЛОВОЙ И УСАДОЧНОЙ ЗАДАЧ** с учетом их взаимного влияния можно считать обязательным условием достоверности расчетов.

Следует отметить, что в реальности помимо двух описанных выше механизмов, вероятно действуют и некоторые промежуточные. Однако, попытки не дополнить, а заменить ими описанные выше два крайних механизма, неизбежно приведут к потере универсальности модели и адекватности решения. Именно такого рода «промежуточные» модели в настоящее время применяются в большинстве систем моделирования ЛПИ. По сведениям авторов, в полной мере моделирование микро- и макропористости не реализовано ни в одной известной литейной системе (включая ProCAST, MagmaSoft, и др. менее популярные). Исключение составляет только система «Полигон», для которой собственно и разрабатывались эти модели. Разумного объяснения такому неблагоприятному положению авторы не видят, т.к. описанные механизмы неоднократно обсуждались, по крайней мере в отечественных публикациях [6,18-24]. Более того, в рамках работы по сравнительному анализу систем «Полигон» и ProCAST [25], авторы еще в 1996 г. ознакомили швейцарскую группу разработчиков ProCAST (сама система американская) с описанными выше моделями. При этом выяснилось, что швейцарские коллеги полностью согласны с нашим подходом, а по моделям формирования микропористости вообще придерживаются абсолютно идентичных представлений. Однако до сих пор (2002 г.) полного решения для микро- макропористости коммерческая версия ProCAST не содержит, хотя некоторая упрощенная версия расчета макропористости там появилась в 1998 году. Пример очень показательный учитывая, что по силе физико-математических моделей ProCAST видимо является лучшей западной литейной системой.

Рассмотрим более подробно *принципы решения задачи формирования макропористости и раковин*. Как уже указывалось выше, основа решения этой задачи состоит в определении перемещения зеркал расплава в процессе затвердевания в каждой изолированной зоне питания. Для этого на каждом временном шаге необходимо последовательно решить следующие задачи:

- выявить все изолированные зоны;
- определить какие зоны наследуют зеркала зон-предков предыдущего шага и, с учетом наследования, в каждой зоне определить высоту зеркала $Y1$ в начале шага;
- в каждой зоне определить эффективную площадь зеркала S , величину общего объема усадки ΔV ниже $Y1$, перемещение зеркала $\Delta Y = \Delta V / S$ и назначить пористость для области выше $Y2 = Y1 - \Delta Y$.

В отличие от тепловой и усадочно-фильтрационной задачи, задача расчета макропористости не требует применения МКЭ в своей классической постановке. Более того, величина ΔY обычно существенно меньше дискретности конечно-элементной (КЭ) сетки, что заставляет делать специальные сечения КЭ сетки с такой дискретностью, которая диктуется величиной ΔY в каждой зоне. В то же время, задачи определение зон, зеркал и величин эффективных площадей наиболее выгодно делать на базе КЭ сетки как с точки зрения адекватности отражения реальной геометрии, так и с точки зрения скорости. Следует подчеркнуть, что при этом поверхности изолированных объемов проходят не по границам элементов, а в соответствии с назначенным поузловым распределением некоторой «изолирующей» функции (т.е. функции определяющей границы зоны) и выбранного вида интерполяционного полинома (см. выше). Таким образом, задачу по макропористости рационально решать на базе той же КЭ сетки, которая используется в тепловой и фильтрационной задачах. Однако, (и это важно !) временной шаг задачи по макропористости не должен слепо повторять шаг тепловой задачи. Для каждой изолированной зоны **ШАГ ДОЛЖЕН ОПРЕДЕЛЯТЬСЯ В СООТВЕТСТВИИ С МАКСИМАЛЬНО ДОПУСТИМОЙ ВЕЛИЧИНОЙ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ЗЕРКАЛА**, например 1/100 от высоты зоны. В случае необходимости, шаг следует измельчить по сравнению с шагом тепловой задачи, используя например линейную функцию для поиска промежуточных значений полей температуры и доли жидкой фазы.

Выявление изолированных зон. Хотя определение изолированных зон является чисто геометрической задачей, формирование изолирующей функции зависит от физики процесса и требует некоторого обсуждения. В простейшем случае распределение изолирующей функции $\{I\}$

(вектор-столбец в терминах МКЭ) представляет из себя распределение жидкой фазы $\{P\}$, а критерием изоляции служит падение этой функции ниже некоторой критической величины P_{lo} , которая соответствует полному перекрытию междендритных каналов. Однако, это не учитывает возможного прекращения течения из-за затруднения фильтрации при доле жидкого выше P_{lo} . Более правильным будет коррекция $\{I\}$ с учетом распределения давления $\{P\}$ и критического давления P_o . Тогда для каждой строки вектор-столбца $\{I\}$ можно записать: $I=P$ при $P>P_o$, $I=0$ при $P\leq P_o$. Возможно также полностью перейти на давление: $\{I\}=\{P\}$ с критерием изоляции P_o . Однако, это несколько противоречит исходной постановке задачи макропористости, которая предполагает зависимость поведение металла от доли жидкого. С этой точки зрения, изолирующая граница должна быть увязана с критическим значением P_{lo} . После назначения $\{I\}$, собственно определение зон можно делать прямым перебором элементов по методу «спирали» последовательно добавляя элементы (или узлы) по «неизолированным» граням. Но, как показывает опыт, быстрее работает итерационный метод с применением матриц «звезд узлов» - т.е. списков узлов окружающих каждый узел КЭ сетки. Сам алгоритм при этом принципиально мало отличается от метода Гаусса-Зейделя предназначенного для решения систем линейных уравнений [13].

Определение наследования зон, начальной высоты зеркала и объема усадки. Задача наследования зон очевидным образом решается путем поиска пересечений объемов текущих зон и зон-предков прошлого шага. При этом в общем случае, возможны запутанные ситуации, когда две зоны имеют общего предка (наиболее вероятно), одна зона имеет более одного предка (возможно при расплавлении) или смесь этих вариантов. Общее правило выявления единственного предка состоит в выборе самого высокого зеркала среди конкурирующих предков и отсева всех предков с зеркалом выше, чем самая высокая точка зоны Y_{max} . Тогда учитывая, что Y_2 – высота зеркала в конце предыдущего шага, можно записать: $Y_1=Y_2$ при $N=1$; $Y_1=Y_{max}$ при $N=0$, где N – количество предков зоны. Объем усадки под зеркалом с учетом (19) определится как интегральная сумма произведений микрообъемов на разницу относительных усадок V_u в конце и начале шага для всех точек ниже Y_1 . Конкретный вид этого выражения будет зависеть от способа дискретизации геометрии. Для КЭ сетки тетраэдральных элементов можно использовать следующее выражение:

$$\Delta V = \sum_e 0.25 \cdot V_e \cdot \left(\sum_{k=1}^4 \Delta V_k \right);$$

$$\Delta V_k = V_u(Ps_2) - V_u(Ps_1) \quad \text{при} \quad Y_k \leq Y_1;$$

$$\Delta V_k = 0 \quad \text{при} \quad Y_k > Y_1,$$
(20)

где e – номер элемента зоны; V_e – объем элемента e ; $k=1...4$ – локальный номер узла в элементе; ΔV_k – усадка в области узла k за шаг; Y_k – высота узла k ; $V_u(Ps_1)$, $V_u(Ps_2)$ – относительная объемная усадка по формуле (19) для доли твердого Ps_1 и Ps_2 в начале и конце шага соответственно. Строго говоря, формула (20) содержит некоторую погрешность $\pm v$ для узлов близких к Y_1 , но этим вероятно можно пренебречь с учетом того, что $\Delta V \gg v$. Естественно, что если зона не изолирована от специальных границ с принудительной подпиткой (назначаемых при способах литья типа ЛНД), то $\Delta V=0$.

Определение эффективной площади зеркала и пористости. При решении этой задачи следует определить следующие критические точки доли жидкого, которые определяют степень структурированности двухфазной зоны:

- P_{ln} – доля жидкого при образовании непрерывного каркаса (начала линейной усадки);
- P_{lg} – доля жидкого при конце гравитационного течения;
- P_{lo} – доля жидкого полного перекрытия каналов (см. выше).

Следует подчеркнуть, что эти критические точки хотя и несут определенный физический смысл отраженный в названии, но скорее являются некоторыми эффективными величинами регламентирующими смену модели поведения расплава в двухфазной зоне. Для определения эффективной площади зеркала, необходимо сделать горизонтальное сечение зоны на уровне Y_1 и в каждой точке этого сечения вычислить долю жидкой фазы в соответствии с узловыми значениями пересекаемого элемента и типом интерполяционного полинома для распределения $\{P\}$. Тогда эффек-

тивную относительную площадь K_s (в долях единицы) для каждой точки сечения можно выразить следующим образом:

$$\begin{aligned} K_s &= 1 && \text{при } Pl > Pl_n; \\ K_s &= Pl && \text{при } Pl_g \geq Pl \geq Pl_n; \\ K_s &= 0 && \text{при } Pl < Pl_g; \\ Pl &= 0.5 \cdot (Pl_1 + Pl_2), \end{aligned} \quad (21)$$

где Pl_1, Pl_2 – доля жидкого в начале и конце шага соответственно. Значение S определится как интегральная сумма произведений микроплощадей на K_s в каждой точке или по формулам типа (20) конкретный вид которых будет зависеть от способа дискретизации зеркала. Вычислив новое положение зеркала $Y_2 = Y_1 - \Delta V/S$, для всех точек зоны между Y_1 и Y_2 можно с учетом (19) определить окончательную макропористость Por (в процентах) по следующим формулам:

$$\begin{aligned} Por &= 100\% && \text{при } Pl > Pl_n; \\ Por &= Pl \cdot 100\% && \text{при } Pl_g \geq Pl \geq Pl_n; \\ Por &= (1 - V_u(P_s)) \cdot 100\% && \text{при } Pl < Pl_g; \\ Por &= 0\% && \text{при } Y < Y_2 \text{ (в случае расплавления),} \end{aligned} \quad (22)$$

где Y – высота точки, где определяется Por ; $P_s = 1 - Pl$ – доля твердого.

Коэффициенты усадки β и α , спектр $K_u(P_s)$, критические точки Pl_n , Pl_g , Pl_o являются свойствами сплава. Коэффициент объемной термической усадки α в жидком состоянии обычно имеет малый вклад в пористость, поэтому для него допустимо использовать значения из физических справочников для аналогичных сплавов или даже чистых металлов. Спектр $K_u(P_s)$ для многих сплавов можно считать линейным. Объемную усадку сплава при затвердевании β лучше определять экспериментально, например по известной пробе Татюра. В табл. 1 приведены усадочные свойства для высокопрочных алюминиевых сплавов экспериментально определенные в ЦНИИМ в рамках работ по наполнению базы данных системы моделирования ЛП «Полигон». Если коэффициенты усадки являются относительно консервативными характеристиками, то критические точки существенно зависят от способа приготовления сплава, от характерных скоростей охлаждения в интервале затвердевания и ряда других параметров. Лучше всего определять критические точки методом совмещения результатов расчета и эксперимента. При этом вполне допустимо использовать данные по макропористости реальных отливок несложной конфигурации. Однако вопрос о точном определении критических точек во многом риторический, т.к. в реальном производстве КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ СПЛАВА ИЗМЕНЯЮТСЯ В ШИРОКИХ ПРЕДЕЛАХ. Одной из распространенных ошибок большинства исследователей является попытка определять конкретное значение критической точки (чаще всего Pl_n) и использовать это значение в прогнозных расчетах. Это совершенно неправильно и чаще всего не отражает реально наблюдаемую статистику дефектов по макропористости. При ответственном моделировании даже для отливок простой конфигурации НЕОБХОДИМО ВАРЬИРОВАТЬ НЕКОНСЕРВАТИВНЫЕ ПАРАМЕТРЫ. Для иллюстрации этого положения можно привести результаты моделирования несложной отливки из стали Г13 (рис.12). При варьировании значений критических точек, было установлено, что для данной технологии в верхней части отливки будет вероятностным образом появляться значительная рыхлота (рис.12 для $Pl_n=0.1$). Такая технология является неустойчивой и рано или поздно приведет к появлению брака, хотя часть отливок может быть удовлетворительного качества (рис.12 для $Pl_n=0.7...0.9$). (Этот вывод впоследствии был подтвержден цеховыми технологами в специальном письме с оценкой результатов моделирования.)

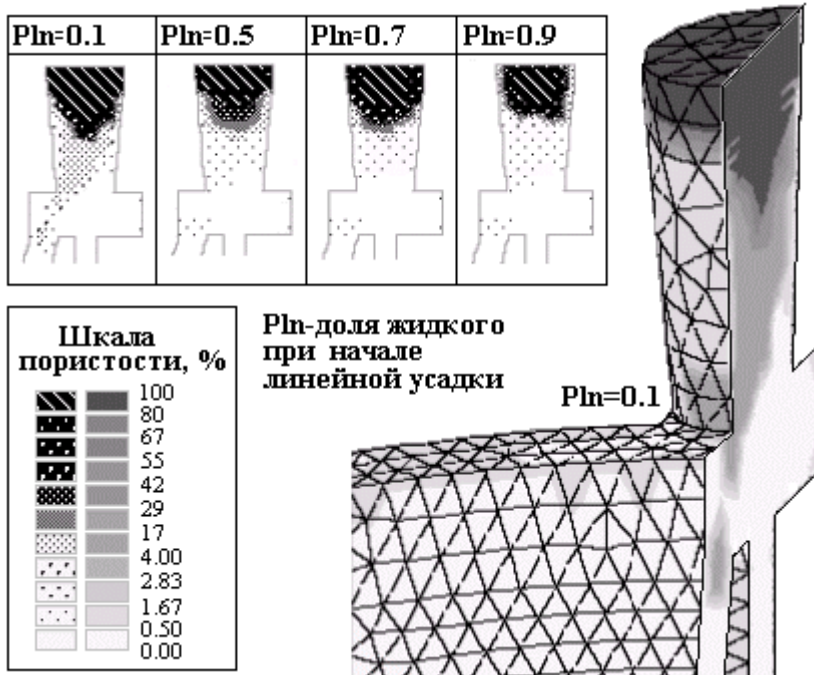


Рис.12 Расчетная пористость при различных значениях критических точек.

Теперь рассмотрим более подробно *принципы решения задачи формирования микропористости*. Как уже указывалось выше, задача по микропористости основана на решении дифференциального уравнения фильтрационного течения. Это уравнение может быть получено при совместном решении уравнения Дарси [22,23] и уравнения неразрывности потока [26]. Возможна нестационарная постановка фильтрационной задачи с использованием понятия «упругоёмкости» [7]. Однако, в случае потоков характерных для фильтрационного течения при усадке, задачу можно считать стационарной.. Проводя некоторую модификацию для литейной постановки, уравнение стационарного фильтрационного течения можно записать следующим образом:

$$K_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + K_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + qv = C_v \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (23)$$

$$T = T(S, t),$$

$$Kn(\partial T / \partial n) = -qn,$$

$$Kn(\partial T / \partial n) = -\alpha(T - T_{air}),$$

где x, y, z - координаты в области пространства ограниченного поверхностью S ; H – распределение пьезометрического напора в пространстве координат x, y, z ; K_x, K_y, K_z - проницаемость в направлении осей x, y, z соответственно; qv – внутренний объемный сток за счет усадки; $H(S)$ – задаваемый (чаще всего атмосферный) пьезометрический напор на поверхности тела S .

Уравнение фильтрационного течения (23) наиболее адекватно можно решить с помощью МКЭ так же как, как уравнение нестационарной теплопроводности. Метод конечных разностей (МКР) в данном случае проявляет те же недостатки, которые подробно обсуждались выше: «наследственную» неспособность правильно учесть соотношение объемов и граничных площадей, неадекватность описания геометрии, заведомо недостаточную дискретность и т.д. Таким образом, в качестве численного метода решения (23) следует использовать МКЭ.

Вопрос о назначении поверхности приложения внешнего атмосферного давления не так прост как кажется. На первый взгляд можно решить, что этой поверхностью должна быть граница отливки со средой. Однако, учитывая представления о постоянном присутствии как пятен плотного контакта (1.5-3% площади), так и зазора (98.5-97% площади), можно предположить, что границей приложения атмосферного давления должна быть также и граница между отливкой и формой. Опыт моделирования показывает, что для обычных способов литья ПОВЕРХНОСТЬ ПРИЛОЖЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ СЛЕДУЕТ СЧИТАТЬ ВСЮ ВНЕШНЮЮ ПОВЕРХНОСТЬ ОТЛИВКИ. Естественно, что по мере затвердевания (на поверхности $P_l < P_o$) внешнее давление постепенно отключается. Величина объемной скорости усадки qv в каждом конечном элементе очевидным образом определится через узловые доли жидкого, температуры и

времена в начале и конце шага по времени. Проницаемость можно выразить через коэффициент фильтрации K_f и кинематическую вязкость ν следующим образом: $K_x=K_y=K_z=K_f/\nu$. С учетом (23), давление P в каждом узле КЭ сетки можно вычислить следующим образом:

$$\begin{aligned} P &= (H + Y_{\text{mir}} - Y) \cdot \rho \cdot g \quad \text{при} \quad Y \leq Y_{\text{mir}}; \\ P &= 0 \quad \text{при} \quad Y > Y_{\text{mir}}; \\ Y_{\text{mir}} &= 0.5 \cdot (Y_1 + Y_2), \end{aligned} \quad (24)$$

где ρ – плотность расплава; g – ускорение свободного падения; Y – высота точки, где определяется P ; Y_{mir} – средняя высота зеркала за шаг в зоне, где находится точка.

Там, где давление упало ниже критического P_0 (см. выше) величина микропористости определится через относительную усадку V_u по формуле (19) и долю твердого Ps_{t_0} в тот момент времени t_0 , когда давление упало ниже P_0 . В общем случае, t_0 лежит внутри временного шага. Учитывая все это, микропористость можно вычислить по следующим формулам:

$$\begin{aligned} P_{\text{or}} &= (1 - V_u(Ps_{t_0})) \cdot 100\% \quad \text{при} \quad P_1 > P_0, P_2 \leq P_0; \\ Ps_{t_0} &= \frac{Ps_2 - Ps_1}{P_2 - P_1} (P_0 - P_1) + Ps_1, \end{aligned} \quad (25)$$

где P_1, P_2 – давление в начале и конце шага соответственно.

Величины $K_f=f(P_l)$, P_0 , ν являются свойствами сплава. Коэффициент фильтрации K_f зависит от доли жидкого. Эмпирическим путем установлено, что эта зависимость может быть выражена через коэффициент пропорциональности K_0 и некоторую степень n следующим образом: $K_f=K_0 \cdot (P_l/P_s)^n$. Коэффициент K_0 является свойством сплава и определяется экспериментально. Экспериментальные данные по K_0 полученные в ЦНИИМ приведены в табл.1. Степень n обычно задают равной двум. Следует отметить, что зависимость проницаемости от P_l может быть задана и более сложным образом. Вероятно, имеет смысл использовать зависимости типа $K_x=f(\partial P_l/\partial x)$, $K_y=f(\partial P_l/\partial y)$, $K_z=f(\partial P_l/\partial z)$, учитывающие пространственную направленность затвердевания. Видимо, перспективным является и компьютерный метод определения опубликованный в стендовом докладе одной из Ижевских конференций по кристаллизации. В этом докладе предлагалось определять аналитический вид зависимости $K_f=f(P_s)$ с помощью численного моделирования гидродинамических процессов течения жидкости через заданный твердый каркас в масштабе одной дендритной ячейки. Однако, в любом случае адекватное моделирование образования микропористости требует ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК сплава. Для этого достаточно на пробном слитке в условиях направленного теплоотвода провести термометрирование и аккуратно определить распределение плотности (методом гидровзвешивания). Причем желательно это делать в тех же условиях, в которых приготавливается сплав для реальных отливок, т.к. известно, что микропористость существенно зависит от особенностей модифицирования, рафинирования и т.п. По некоторым экспериментальным данным, для алюминиевых сплавов при температурах близких к ликвидусу прочность жидкого $P_0 \approx 0.0196$ МПа, а кинематическая вязкость $\nu \approx 1 \cdot 10^{-5}$ м²/с.

Таблица 1.

Усадочные параметры высокопрочных алюминиевых сплавов

Сплав	$\beta, \%$	$K_0, \text{м}^2$ при $n=2$ для $K_f[\text{м}^2]=K_0 \cdot (P_l/P_s)^n$	$P_{ln}; P_{lg}; P_{lo}$ (средние значения)
АЛ 23-1 (АМг6лч)	4.5	$2 \cdot 10^{-13}$	0.5; 0.3; 0.1
АЛ 24П	4.8	$5 \cdot 10^{-13}$	0.5; 0.3; 0.1
АЛ 24С	5.2	$5 \cdot 10^{-13}$	0.5; 0.3; 0.1
АЛ 9М	3.8	$4 \cdot 10^{-13}$	0.7; 0.15; 0.1
АМХ 605	5.7	$7 \cdot 10^{-13}$	0.5; 0.3; 0.1
ВАЛ 10 (АМ4.5Кд)	5.9	$5 \cdot 10^{-13}$	0.7; 0.15; 0.1
для сравнения А97	6.5	$9 \cdot 10^{-13}$	0.3; 0.15; 0.1

Описанные выше модели образования макро- и микропористости неоднократно успешно использовались при моделировании реальных литейных технологий с помощью системы моделирования ЛП «Полигон». При этом помимо обычных способов литья в землю и кокиль, моделировались такие способы как ЛНД, ЛПД, ЛКД (жидкая штамповка), направленное затвердевание в вакуумных печах, центробежное литье. Помимо алюминиевых сплавов и сталей моделировались процессы в отливках из медных, магниевых и никелевых сплавов, некоторых видов чугунов, драгоценных металлов. В том числе для отливок специального назначения с жесткими требованиями по качеству и гидроплотности.

В заключение, следует отметить следующее. Совершенно неверно думать, что понимание принципов моделирования усадочных процессов необходимо исключительно для специалистов по моделированию. В настоящее время модели для численного моделирования – это модели, позволяющие адекватно описывать реальную физику литейных процессов, в полной мере применять современный математический аппарат и возможности вычислительных технологий. Фактически такие модели и составляют современное ядро теории литейных процессов. С этой точки зрения оценка их как некой экзотики для разработчиков моделирующих систем неизбежно приведет (и приводит) к деградации литейных школ и падению теоретического уровня подготовки литейщиков. Конечно, не каждый литейщик должен быть специалистом по численному моделированию, но, в идеале, каждый литейщик должен понимать принципы используемых моделей, то есть хотя бы в минимальном объеме знать современную теорию литейных процессов.

Реальная ситуация сегодня такова, что импортные литейные системы в области моделирования основного вида дефектов, то есть дефектов питания, отстают от наиболее современных российских систем. Несмотря на явно завышенную оценку эффективности дорогих импортных систем, которые усиленно пропагандируют в России, заводы, имеющие возможность реально сравнить возможности импортных и российских разработок, предпочитают более сильные (т.е. российские) системы.

Из последних примеров, подтверждающих это, можно привести опыт работы АвтоВАЗа. Этот завод, купивший MagmaSoft и оценивший реальные возможности этой системы, рассматривал вопрос о закупке альтернативной литейной системы. В 2000 г. одно из производств завода взяло на опытную эксплуатацию ProCAST и «Полигон». Кроме того, заводские специалисты были подробно ознакомлены с немецкой системой Simtec (WinCast). По результатам опытной эксплуатации и проведенных по договорам расчетов по анализу литейной технологии отливки «Блок цилиндров», АвтоВАЗ в 2001 г. приобрел три полных лицензии системы «Полигон». В данном случае выбор завода был продиктован не дороговизной импортных систем, так как за ту же сумму можно приобрести лицензию на лучшую из западных систем ProCast. И это далеко не единственный случай. Похожая ситуация была в 1999 г. на крупном Петербургском дизелестроительном заводе «Звезда», оснащенном французской конструкторской системой EUCLID. Дилеры этой системы пропагандировали на заводе западную систему моделирования ЛП Simulor. Однако, заводские специалисты проведя опытную эксплуатацию «Полигона», безусловно предпочли его разностной импортной системе. Соответственно завод «Звезда» приобрел лицензию на российскую систему и в настоящее время является одним из активных пользователей «Полигона». Подобных примеров можно привести еще множество. Как уже упоминалось выше, на территории России «Полигон» имеет в несколько раз больше продаж, чем все импортные литейные системы вместе взятые.

В настоящее время можно констатировать и начало продвижения «Полигона» на западный рынок. Сейчас «Полигон» официально зарегистрирован как *“партнер по исследованиям”* известной американской CAD-системы SolidWorks. Из других зарубежных партнеров последнего времени можно отметить южнокорейское литейное предприятие CASTEC занимающееся лопаточным производством, которое в 2001 г. приобрело лицензию на «Полигон».

1. Гиршович Н.Г., Нехендзи Ю.А. Аналитические решения простейших задач о затвердевании отливок разной конфигурации. Литейное производство. - 1956, N 3, С.14-19; N 4, С.13-17; N 6, С.13-17; N 12, С.13-18.
2. Тихомиров М.Д., Абрамов А.А., Кузнецов В.П. Современный уровень теории литейных процессов. Литейное производство. - 1993, N 9, С.3-5.
3. Sahm P.R., Hansen P.N. Numerical Simulation and Modelling of Casting and Solidification Processes for Foundry and Cast-House, International Committee of Foundry Tehnical Assotiations, 1984. p.253.
4. Кузнецов В.П., Абрамов А.А., Тихомиров М.Д., Сабиров Д.Х. Компьютеризация и автоматизация процесса проектирования отливок и изготовления оснастки. Литейное производство. - 1997, N 4, С.45-47.
5. Estrin L. A deeper look at casting solidification software. Modern Casting, GIFA 94, June, 1994.
6. Тихомиров М.Д. Модели литейных процессов в САМ ЛП "Полигон": Сборник трудов ЦНИИМ, Литейные материалы, технология, оборудование, выпуск I.- Санкт-Петербург, 1995. С.21-26.
7. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов: Пер. с англ. М.: Мир, 1979. 392 с.
8. Голод В.М., Дьяченко С.А. Численный расчет затвердевания чугуновых отливок: Сб. Кристаллизация. Теория и эксперимент. - Ижевск:УдГУ, 1987. С.26-33.
9. Карножицкий В.Н. Контактный теплообмен в процессах литья. - К.: 1978. 300 с.
10. Тихомиров М.Д. Теплопередача через границу "отливка-форма" при затвердевании алюминиевых сплавов. Литейное производство. - 1990, N 6, С.18-19.
11. Михеев М.А., Михеева И.М. Основы теплопередачи. М., Энергия, 1977. 344 с.
12. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике: Пер. с англ. М.: Мир, 1975. 544 с.
13. Норри Д., де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов: Пер. с англ. М.: Мир, 1981. 304 с.
14. Мяченков В.И., Мальцев В.П., Майборода В.П. и др. Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов. - М.: Машиностроение, 1989. 520 с.
15. Nakagawa T., Takebayashi Y. Solidification simulation of light alloy casting. Keikinzoku, 1986, No 7, p.445-452.
16. Голод В.М., Нехендзи Ю.А. Определение некоторых теплофизических свойств сплавов по кривым охлаждения: Сб. Теплообмен между отливкой и формой. - Минск: Высшая школа, 1967, с.179-183.
17. Калюкин Ю.Н., Мальцева Ю.Ю., Тихомиров М.Д., Сабиров Д.Х. Высокоэффективная технология литья крупногабаритных лопаток ГТД.- М.: Литейное производство.- 2001, No 11, с.7-9.
18. Нехендзи Ю.А. Стальное литье.-М., Metallurgizdat, 1948.
19. Гиршович Н.Г. Чугунное литье.-М., Metallurgizdat, 1949.
20. Гуляев Б.Б. Затвердевание и неоднородность стали.-М., Metallurgizdat, 1950.-227 с.
21. Голод В.М. Проблема оптимизации питания отливок: Теплофизика процессов затвердевания стали.-Сб.науч.тр. ИПЛ АН СССР.-К., 1979.-С.139-153.
22. Борисов Г.П. Давление в управлении литейными процессами.-К., Наукова думка, 1988.-272 с.
23. Котлярский Ф.М. Формирование отливок из алюминиевых сплавов.-К., Наукова думка, 1990.-230 с.
24. Койнов И.Л. Компьютерное исследование процессов питания в отливках из алюминиевых сплавов при литье в кокиль и песчаные формы: Кристаллизация и компьютерные модели.-Сб. науч. тр.-Ижевск, УдГУ, 1991.-С.115-124.
25. Тихомиров М.Д. Сравнение тепловых задач в системах моделирования литейных процессов Полигон и ProCAST: Сборник трудов ЦНИИМ, Компьютерное моделирование литейных процессов, выпуск 2.- Санкт-Петербург, 1996. С.22-37.
26. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. - М.: Наука, 1988. 736 с.